

Gabamto

MS211 - Turma D - Prova 2 - 26/06/2024

Nome:

RA:

Utilize **4 dígitos decimais** em todas as questões! Não precisa escrever zeros não significativos. (Por exemplo, pode escrever 0.5 ao invés de 0.5000.) Somente faça o que está pedido. **Justifique as suas respostas!** Boa prova!

1. O modelo SIR (Suscetível-Infetado-Recuperado) é um modelo epidemiológico fundamental que descreve a dinâmica de uma doença infecciosa dentro de uma população. Ele utiliza um sistema de equações diferenciais e possui dois parâmetros principais que governam a propagação e o declínio da doença, a saber a Taxa de Transmissão (β) e a Taxa de Recuperação (γ). Sejam $S(t)$, $I(t)$ e $R(t)$ as populações dos suscetíveis, infectados e recuperados, respectivamente, no tempo t (em dias). Supondo que não tenha nascimentos e mortes, o modelo SIR pode ser descrito por

$$\begin{cases} S' &= -\beta I \frac{S}{N} \\ I' &= \beta I \frac{S}{N} - \gamma I \\ R' &= \gamma I \\ S(0) &= S_0 \\ I(0) &= I_0 \\ R(0) &= R_0 \end{cases}$$

Suponha que $\beta = 0.1$ e $\gamma = 0.2$. Além disso, sejam $N = 45$, $S_0 = 25$, $I_0 = 15$ e $R_0 = 5$ (em milhões de pessoas). Seja $Y(t) = (S(t), I(t), R(t))^T$ para todo $t \geq 0$.

Aplique o método de Euler Aperfeiçoado em forma tabular com $h = 0.25$. Preenche os espaços marcados com ... da tabela da forma seguinte. Utilize a fórmula específica da derivada para este problema particular sempre que aparecem expressões de derivadas. [2.25 pts]

Faça uma cópia dessa tabela em formato paisagem no verso desta página. Durante a prova, a Questão 1 será colocada no telão para facilitar a sua tarefa.

(a)

t_k	$Y_k = \begin{pmatrix} \dots\dots \\ \dots\dots \\ \dots\dots \end{pmatrix}$	$Y'_k = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1} = \dots\dots = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$	$\bar{Y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$	$\Delta Y_k = \dots\dots\dots$
0					
0.25					

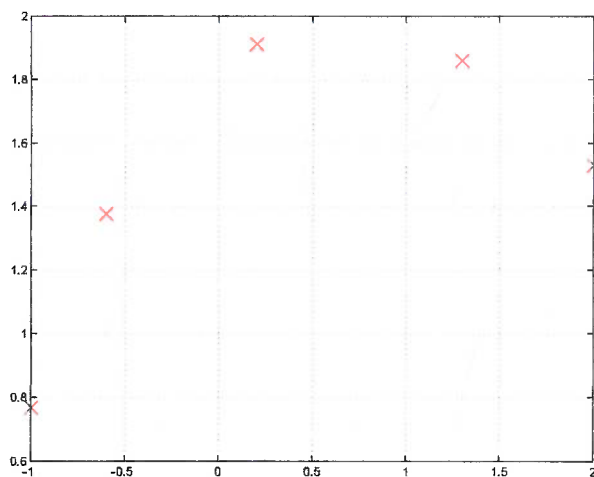
- (b) Quais são as suas estimativas para as populações dos suscetíveis, infectados e recuperados, respectivamente, depois de 6 horas? [0.25 pt]

$1. a)$ t_k	$y_k = \begin{pmatrix} S_k \\ I_k \\ R_k \end{pmatrix}$	$y_k' = \begin{pmatrix} -0.1 I_k \cdot \frac{S_k}{45} \\ 0.1 I_k \cdot \frac{S_k}{45} - 0.2 I_k \\ 0.2 I_k \end{pmatrix}$	$\bar{y}_{k+1} = \begin{pmatrix} \bar{S}_{k+1} \\ \bar{I}_{k+1} \\ \bar{R}_{k+1} \end{pmatrix}$	$\bar{y}_{k+1} = \begin{pmatrix} -0.1 \bar{I}_{k+1} \cdot \frac{\bar{S}_{k+1}}{45} \\ 0.1 \bar{I}_{k+1} \cdot \frac{\bar{S}_{k+1}}{45} - 0.2 \bar{I}_{k+1} \\ 0.2 \bar{I}_{k+1} \end{pmatrix}$	$\Delta y_k = \frac{y_k' + \bar{y}_{k+1}}{2}$
0	$\begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.8333 \\ -2.1667 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 24.7917 \\ 14.4583 \\ 5.75 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.7965 \\ -2.0951 \\ 2.8917 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.2037 \\ -0.5327 \\ 0.7365 \end{pmatrix}$
0.25	$\begin{pmatrix} 24.7963 \\ 14.4673 \\ 5.7365 \end{pmatrix}$				

1. b) Depois de 6 horas, as populações dos suscetíveis, infectados e recuperados são aproximadamente 24.7963, 14.4673 e 5.7365 milhões, respectivamente.

2. Considere os dados da seguinte tabela, plotados na figura em baixo.

x	-1	-0.6	0.2	1.3	2
y	0.7682	1.3781	1.9128	1.8615	1.5323



- (a) Sabendo-se que estes dados são aproximadamente dispersados num círculo de raio r com centro em $(c, 0)$, ajuste uma curva da forma $g(x) = \sqrt{r^2 - (x - c)^2}$ aos dados acima. (Dica: Como passo intermediário, sugere-se converter este problema para $x^2 + y^2 \approx \alpha_1 + \alpha_2 x$.) [2 pt]
- (b) Qual é o resíduo, quer dizer o erro em termos da soma dos quadrados dos desvios obtido neste ajuste? Indique claramente como se calcula este resíduo sem fazer as contas. [0.25 pts]
- (c) Utilize o seu resultado do item (a) para calcular $g(0)$. [0.25 pt]

$$\begin{aligned}
 (a) \quad y &\approx \sqrt{r^2 - (x - c)^2} \\
 \Leftrightarrow y^2 &\approx r^2 - [x^2 - 2cx + c^2] \\
 \Leftrightarrow y^2 &\approx r^2 - x^2 + 2cx - c^2 \\
 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_Z &\approx \underbrace{(r^2 - c^2)}_{\alpha_1} + \underbrace{2cx}_{\alpha_2}
 \end{aligned}$$

x	-1	-0.6	0.2	1.3	2
Z	1.5901	2.2592	3.6988	5.1551	6.348

2a) cont. $A \cdot \alpha \approx z \Leftrightarrow A^T A \alpha = A^T z$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -0.6 \\ 1 & 0.2 \\ 1 & 1.3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 1.9 \\ 1.9 & 7.09 \end{pmatrix}, A^T z = \begin{pmatrix} 19.0513 \\ 17.1918 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1.9 & | & 19.0513 \\ 1.9 & 7.09 & | & 17.1918 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 1.9 & | & 19.0513 \\ 0 & 6.368 & | & 9.9523 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha^* = \begin{pmatrix} \alpha_1^* \\ \alpha_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2164 \\ 1.5629 \end{pmatrix}$$

$$2c^* = \alpha_2^* = 1.5629 \Rightarrow c^* = 0.7814$$

$$r^{*2} - c^{*2} = \alpha_1^* = 3.2164$$

$$\Rightarrow r^{*2} = 3.2164 + c^{*2} = 3.2164 + 0.6106 = 3.827$$

$$\Rightarrow r^* = 1.9563$$

$$\therefore g(x) = \sqrt{3.827 - (x - 0.7814)^2}$$

(b)

$$\text{residuo} = \left\| \begin{pmatrix} \sqrt{3.827 - (-1 - 0.7814)^2} - 0.7682 \\ \sqrt{3.827 - (-0.6 - 0.7814)^2} - 1.3781 \\ \vdots \\ \sqrt{3.827 - (2 - 0.7814)^2} - 1.5323 \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

(c) $g(0) = \sqrt{3.8271 - 0.7814^2} = 1.7934$

3.(a) Tabela das Diferenças Divididas
Ordem

x	0	1	2
0	0.5642	-0.2496	-0.214
0.5	0.4394	-0.4636	
1	0.2076		

$$p_2(x) = 0.5642 - 0.2496x - 0.214 \cdot x(x-0.5)$$

$$(b) p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \Rightarrow p'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-2x e^{-x^2}),$$

$$p''(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (-2 e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [(4x^2 - 2) e^{-x^2}]$$

$$p'''(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [8x e^{-x^2} - 2x(4x^2 - 2) e^{-x^2}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} [8x e^{-x^2} - 4x(2x^2 - 1) e^{-x^2}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 4x e^{-x^2} [3 - 2x^2]$$

$$M_3 = \max_{0 \leq x \leq 1} |p'''(x)| = |p'''(0.5246)| = 2.2024$$

$$|p_2(x) - p(x)| \leq \frac{h=0.5}{4 \cdot 3} \frac{2.2024 \cdot 0.5^3}{4 \cdot 3} = 0.0229 \quad \forall x \in [0, 1]$$

(c)

x	0	1	2
1	0.2076	-0.2962	0.1978
1.5	0.0595	-0.0984	
2	0.0103		

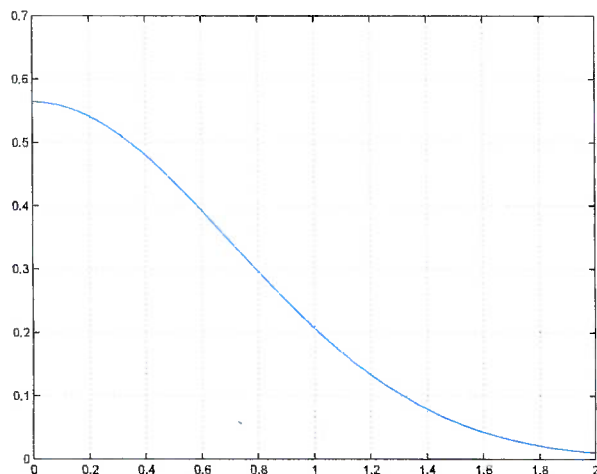
$$q_2(x) = 0.2076 - 0.2962(x-1) + 0.1978(x-1)(x-1.5)$$

(d) $\max_{1 \leq x \leq 2} |p'''(x)| = |p'''(1)| = 0.8302$
 $\Rightarrow |q_2(x) - p(x)| \leq \frac{0.8302 \cdot 0.5^3}{12} = 0.0086 \quad \forall x \in [1, 2]$

3. A densidade de probabilidade de uma distribuição normal com média 0 e variância $\frac{1}{2}$ é dada por

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

A figura seguinte mostra o gráfico de $p(x)$ no intervalo $[0, 2]$.



- (a) Utilize interpolação polinomial *quadrática* pela forma de Newton para encontrar o polinômio $p_2(x)$ de grau ≤ 2 que interpola $p(x)$ nos pontos 0, 0.5 e 1. [0.75 pt] Lembre-se que

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

- (b) Sabemos o seguinte: Se p_n é o polinômio que interpola f em pontos igualmente espaçados

$$x_k = x_0 + kh, \quad \forall k = 0, 1, \dots, n,$$

então o erro da interpolação polinomial satisfaz

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}h^{n+1}}{4(n+1)},$$

em que

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Use o fato que o valor máximo de $|p'''(x)|$ no intervalo $[0, 1]$ ocorre em $x \approx 0.5246$ para determinar um limitante superior de $|p(x) - p_2(x)|$ para todos $x \in [0, 1]$. [0.75]

- (c) Utilize interpolação polinomial *quadrática* pela forma de Newton para encontrar o polinômio $q_2(x)$ de grau ≤ 2 que interpola $p(x)$ nos pontos 1, 1.5 e 2. [0.75]
- (d) Use o fato que o valor máximo de $|p'''(x)|$ no intervalo $[1, 2]$ ocorre em $x = 1$ para determinar um limitante superior de $|p(x) - q_2(x)|$ para todos $x \in [1, 2]$. [0.25]

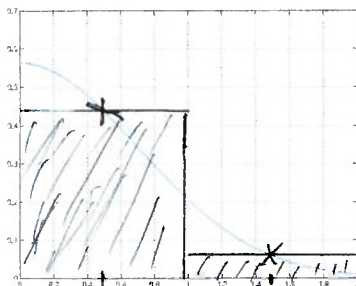
4. Considere $p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

- (a) Utilize a Regra de Simpson Repetida com 2 subintervalos (usados para efeitos de interpolação) para estimar $\int_0^2 p(x) dx$. [0.5 pt]

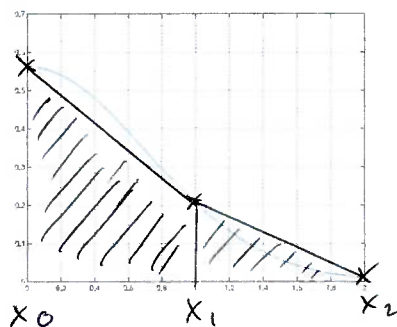
Lembre-se que a Regra de Simpson Repetida, que utiliza $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ como nós de interpolação, é dada por

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

- (b) Suponha que você desconhece a fórmula apresentada no item a). Como poderia utilizar os polinômios $p_2(x)$ e $q_2(x)$ encontrados na Questão 3 para obter a estimativa de $\int_0^2 p(x) dx$ dada pela Regra de Simpson Repetida com 2 subintervalos? Justifique a sua resposta através de uma fórmula sem fazer contas. [0.25 pt]
- (c) Utilize os resultados dos itens 3 b) e d) para obter um limitante superior do valor absoluto da diferença entre $\int_0^2 p(x) dx$ e a sua estimativa dada pela Regra de Simpson Repetida com 2 subintervalos. [0.75 pt]
- (d) Utilize a figura seguinte para fazer uma interpretação gráfica da área que corresponde à estimativa de $\int_0^2 p(x) dx$ dada pela Regra de Retângulos Repetida com 2 subintervalos. Sombreie a área em questão usando um lápis. [0.5 pt] e marque os nós de interpolação usando cruzeiros



- (e) Utilize a figura seguinte para fazer uma interpretação gráfica da área que corresponde à estimativa de $\int_0^2 p(x) dx$ dada pela Regra de Trapézios Repetida com 2 subintervalos. Sombreie a área em questão usando um lápis. [0.5 pt] e marque os nós de interpolação usando cruzeiros.



4.(a) Na Regra de Simpson Repetida com 2 subintervalos, temos $n=4$

Neste caso, $x_0=0, x_1=0.5, x_2=1, x_3=1.5, x_4=2$

$$\begin{aligned} \int_0^2 p(x) dx &\approx \frac{0.5}{3} [p(0) + 4p(0.5) + 2p(1) + 4p(1.5) + p(2)] \\ &= \frac{1}{6\sqrt{\pi}} [1 + 4 \cdot 0.7788 + 2 \cdot 0.3679 + 4 \cdot 0.1054 + 0.0183] \\ &= 0.094 [5.2909] = 0.4973 \end{aligned}$$

$$4(b) \int_0^2 p(x) dx \approx \int_0^1 p_2(x) dx + \int_1^2 q_2(x) dx$$

o que corresponde à Regra de Simpson Repetida com 2 subintervalos.

4(c)

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^2 p(x) dx - \left[\int_0^1 p_2(x) dx + \int_1^2 q_2(x) dx \right] \right| \\ &= \left| \int_0^1 p(x) dx - \int_0^1 p_2(x) dx + \int_1^2 p(x) dx - \int_1^2 q_2(x) dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 p(x) - p_2(x) dx + \int_1^2 p(x) - q_2(x) dx \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 p(x) - p_2(x) dx \right| + \left| \int_1^2 p(x) - q_2(x) dx \right| \end{aligned}$$

3 b), d)

$$\leq 0.0229 + 0.0086 = 0.0315$$