

GABARITO

MS211 - Turma K - Prova 2 - 25/11/2025

Nome:

RA:

de Faltas:

Utilize **4 dígitos decimais** em todas as questões! Não precisa escrever zeros não significativos. (Por exemplo, pode escrever 0.5 ao invés de 0.5000.) Somente faça o que está pedido. **Justifique as suas respostas!** Boa prova!

1. O objetivo dessa questão é modelar o movimento de um objeto de massa m preso a uma mola com Amortecimento (Massa-Mola Amortecido) Desconsiderando forças externas, o sistema está sujeito a duas forças principais:

- Força Elástica (F_k): Restauradora, que obedece à Lei de Hooke: $F_k = -ky$, sendo k a constante elástica;
- Força de Amortecimento: $F_c = -cy'$.

Seja $y(t)$ é o deslocamento do objeto em relação à posição de equilíbrio no tempo t (em segundos). Obtemos

$$\begin{cases} y'' &= -\frac{1}{m}(ky + cy') \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= y'_0 \end{cases} \quad (1)$$

(a) Transforme o problema (1) em um PVI vetorial. Para tanto, use Y para denotar o vetor composto de y e y' , i.e., $(y, y')^T$, e preenche os espaços marcados com ... em baixo.

$$\begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ -\frac{1}{m}(ky + cy') \end{pmatrix} \\ Y(0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

1/4

(b) Por exemplo considere uma roda de um carro de passeio com $k = 22000$ (N/m, i.e., Newtons por metro), massa suspensa $m \approx 150$ (kg) e coeficiente $c = 1450$ (Ns/m, i.e., Newtons por metro por segundo). Seja $y_0 = 0$ (m). Suponha que a roda passa por um buraco, o que leva a $y'(0) = 0.7$ (m/s). (Este valor positivo de y' significa que a mola está se esticando por causa do buraco.)

Aplique o método de Euler Aperfeiçoado em forma tabelar com $h = 0.1$ (s). Preenche os espaços marcados com ... da tabela da forma seguinte. Utilize a fórmula específica da derivada para este problema particular sempre que aparecem expressões de derivadas. Faça uma cópia dessa tabela em formato paisagem no verso desta página. Durante a prova, a Questão 1 será colocada no telão para facilitar a sua tarefa. [2.25 pts]

t_k	$Y_k = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$	$Y'_k = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$	$\bar{Y}_{k+1} = \dots\dots\dots = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$	$\bar{Y}'_{k+1} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix}$	$\Delta Y_k = \dots\dots\dots$
0					
0.1	$\begin{pmatrix} 0.0362 \\ -0.1629 \end{pmatrix}$				

(c) Qual é a sua estimativa para o deslocamento vertical da roda no tempo 0.1 segundos? [0.25 pt]

O deslocamento vertical da roda no tempo 0.1 segundos é aproximadamente 0.0362 metros para baixo.

1/4

t_k

$$Y_k = \begin{pmatrix} y_k \\ y_k \end{pmatrix}$$

$$Y_k' =$$

$$Y_{k+1} = Y_k + Y_k' \cdot h$$

$$Y_{k+1}' =$$

$$\Delta Y_k = \frac{Y_k + Y_{k+1}}{2} \cdot h$$

0

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.7 \\ -6.7667 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.07 \\ 0.0233 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.0233 \\ -10.492 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.0362 \\ -0.8629 \end{pmatrix}$$

0.1

$$\begin{pmatrix} 0.0362 \\ -0.1629 \end{pmatrix}$$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}$

2. Considere as temperaturas médias mensais em Campinas listadas em baixo.

Tabela 1: Temperatura Média Mensal Observada (°C) em Campinas, SP (Fev, Abr, Jun, Ago, Out 2025)

Mês	Fev	Abr	Jun	Ago	Out
Média (°C)	25,1	21,5	18,3	20,4	23,7

(a) Utilize o método dos quadrados mínimos para ajustar uma curva da forma seguinte a estes dados:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \cos(\omega t) + \alpha_3 \sin(\omega t).$$

Aqui $t = 2, 4, 6, 8$ e 10 se refere a fevereiro, abril, junho, agosto e outubro, respectivamente. Para tanto, você deve escolher o parâmetro ω em avanço levando em conta que a curva a ser utilizada no ajuste deve ser periódica e o período deve ser 12 meses, quer dizer, para $t = 12$, devemos obter $\omega t = 2\pi$. Note que $\cos$ e $\sin$ são avaliados em radianos.

Explique como a matriz utilizada no processo é construída, escreva o sistema linear a ser resolvido e resolva-lo. Quais são a solução $\alpha^* = [\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*]^T$ e a função que é utilizada no ajuste? [2.25 pts]

(b) Calcule o residuo do ajuste determinado no item (a). [0.5 pts] ~~$+0.45 + 0.5$~~

(c) Utilize a função encontrada no item (a) para estimar as temperaturas médias em Campinas no mês de dezembro de 2025. [0.25 pts]

(a). $\omega \cdot 12 = 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{6}$ $\frac{1}{4}$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \cos \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{3} \\ 1 & \cos 2\frac{\pi}{3} & \sin 2\frac{\pi}{3} \\ 1 & \cos \pi & \sin \pi \\ 1 & \cos 4\frac{\pi}{3} & \sin 4\frac{\pi}{3} \\ 1 & \cos 5\frac{\pi}{3} & \sin 5\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.866 \\ 1 & -0.5 & 0.866 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -0.5 & -0.866 \\ 1 & 0.5 & -0.866 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

$$Y = (25.1, 21.5, 18.3, 20.4, 23.7)^T$$

Para determinar α^* , precisa-se resolver

$$F^T F \cdot \alpha = F^T Y \quad \frac{1}{4}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 109 \\ -14.85 \\ 2.1651 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 9 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 34.75 \\ -14.85 \\ 2.1651 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_2^* = \frac{34.75}{9} = 3.8611 \\ \alpha_1^* = 14.85 + 7.7222 = 22.572 \\ \alpha_3^* = \frac{2.1651}{3} = 0.7217 \end{cases} \quad \alpha^* = \begin{pmatrix} 22.572 \\ 3.8611 \\ 0.7217 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2}$$

função usada no ajuste

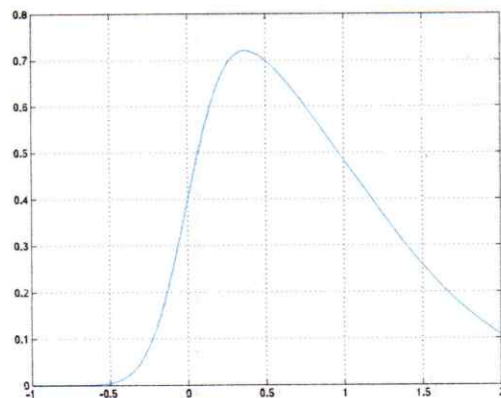
$$g(t) = 22.572 + 3.8611 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 0.7217 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

(b) Resíduo:

$$(25.1 - g(2))^2 + (21.5 - g(4))^2 + (18.3 - g(6))^2 + (20.4 - g(8))^2 + (23.7 - g(10))^2 \\ = (-0.0284)^2 + 0.2326^2 + (-0.411)^2 + 0.3844^2 + (-0.1766)^2 = 0.4028$$

(c) Temperatura média em Campinas em 12/2025
é $\approx 22.5722 + 3.8611 \cos(2\pi) + 0.7217 \sin(2\pi)$
 $= 22.5722 + 3.8611 = \underline{26.433}$

3. Em teoria da probabilidade e estatística, a distribuição normal assimétrica é uma distribuição de probabilidade contínua que generaliza a distribuição normal para permitir assimetria não nula. O gráfico da função f de densidade de probabilidade da distribuição normal assimétrica padrão com parâmetro $\alpha = 5$ é plotado em baixo.



Seguem alguns valores de f :

Tabela 2: Valores da função de densidade de probabilidade da distribuição normal assimétrica padrão ($\alpha = 5$)

x	-0.50	-0.25	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$f(x)$	0.0044	0.0816	0.3989	0.6917	0.7001	0.6022	0.4840

- (a) Utilize interpolação polinomial *quadrática* pela forma de Newton para encontrar o polinômio $p_2(x)$ de grau ≤ 2 que interpola $p(x)$ nos pontos 0.25, 0.5 e 0.75. Lembre-se que

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

[0.75 pt]

- (b) Utilize o polinômio $p_2(x)$, encontrado no item (a) para estimar x^* que satisfaz $f(x^*) = \max\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $y^* = f(x^*)$. [0.75 pt]
- (c) Utilize *interpolação polinomial quadrática inversa* pela forma de Newton para estimar o $\xi \in [-0.5, 0]$ tal que $f(\xi) = 0.2$. Para tanto, use os nós de interpolação mais apropriados. [1 pt]

(a) *Orden*

x	0	1	2
0.25	0.6917	0.0336	-0.8504
0.5	0.7001	-0.3916	
0.75	0.6022		

$$\therefore p_2(x) = 0.6917 + 0.0336(x - 0.25) - 0.8504(x - 0.25)(x - 0.5)$$

$$= 0.6917 + 0.0336(x - 0.25) - 0.8504(x^2 - 0.75x + 0.25 \times 0.5)$$

(b) x^* tal que $f(x^*)$ é maximal e aproximadamente igual a $\bar{x}$

tal que $p_2(\bar{x})$ é maximal

$$0 = p_2'(x) = 0.0336 - 0.8504(2x - 0.75)$$

$$= 0.0336 - 1.7008x + 0.6378$$

$$= 0.6714 - 1.7008x \Rightarrow \bar{x} = \frac{0.6714}{1.7008} = 0.3948$$

(c)

$$\Rightarrow x^* \approx \bar{x} = 0.3948$$

$$\text{e } y^* \approx p_2(\bar{x}) = 0.7051 \quad \frac{1}{4}$$

(c) Os nós mais próximos para estimar $\xi \in [-0.5, 0]$ tal que $f(\xi) = 0.2$ usando interpolação quadrática inversa são $(0.0044, -0.5)$, $(0.0816, -0.25)$ e $(0.3989, 0)$ porque $0.2 \in [0.0816, 0.3989]$ e $|0.2 - 0.0044| < |0.2 - 0.3989|$

	Ordem		
y	0	1	2
0.0044	-0.5	3.2883	-6.2114
0.0816	-0.25	0.7879	
0.3989	0		

$$\therefore q_2(y) = -0.5 + 3.2883(y - 0.0044) - 6.2114(y - 0.0044)(y - 0.0816) \quad \frac{1}{4}$$

$$\xi \approx q_2(0.2) = \underline{\underline{-0.0104}} \quad \frac{1}{4}$$

4. Considere a tabela apresentada na Questão 3 de novo.

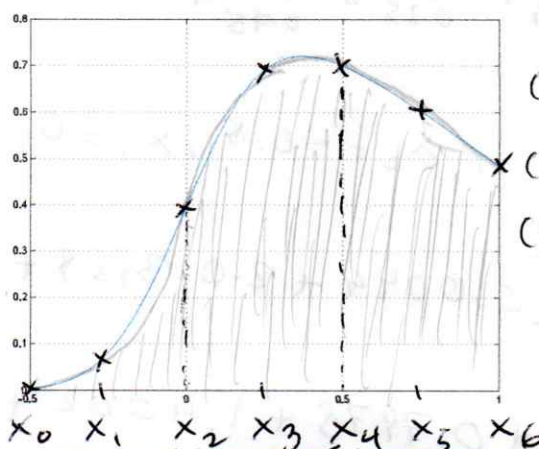
Tabela 3: Valores da função de densidade de probabilidade da distribuição normal assimétrica padrão ($\alpha = 5$)

x	-0.50	-0.25	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$f(x)$	0.0044	0.0816	0.3989	0.6917	0.7001	0.6022	0.4840

- (a) Utilize a *Regra de Simpson Repetida com 3 subintervalos* (usados para efeitos de interpolação) para estimar $\int_{-0.5}^1 f(x)dx$. Lembre-se que a Regra de Simpson Repetida, que utiliza $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ como nós de interpolação, é dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Em seguida, utilize a figura seguinte para fazer uma interpretação gráfica da área que corresponde a essa estimativa de $\int_{-0.5}^1 f(x)dx$. Sombreie a área em questão usando um lápis e marque os nós de interpolação utilizados usando cruzes. A sua interpretação gráfica não precisa ser exata, mas deve indicar claramente que você entendeu o que a ideia por trás da Regra de Simpson Repetida. [1 pt]



interpolação de
 (1) $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$
 (2) $(x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)), (x_4, f(x_4))$
 (3) $(x_4, f(x_4)), (x_5, f(x_5)), (x_6, f(x_6))$
 por polinômios de grau ≤ 2

- (b) Utilize a *Regra dos Trapézios Repetida com 3 subintervalos* (usados para efeitos de interpolação) para estimar $\int_{-0.5}^1 f(x)dx$. Lembre-se que a Regra dos Trapézios Repetida, que utiliza $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ como nós de interpolação, é dada por

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

[0.5 pt]

Vire a página!

(a) $h = 0.25 = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \int_{-0.5}^1 f(x)dx \approx \frac{1}{12} [0.0044 + 4 \cdot 0.0816 + 2 \cdot 0.3989 + 4 \cdot 0.6917 + 2 \cdot 0.7001 + 4 \cdot 0.6022 + 0.4840]$$

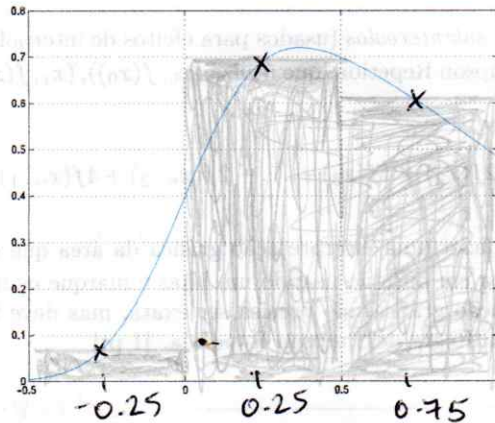
$$= \frac{1}{12} [0.0044 + 0.3264 + 0.7978 + 2.7668 + 1.4002 + 2.4088 + 0.4840] = \frac{1}{12} \cdot 7.8846 = 0.65705$$

~~0.6579~~

$\frac{1}{2}$

$= 0.6824$

- (c) Utilize a figura seguinte para fazer uma interpretação gráfica da área que corresponde à estimativa de $\int_{-0.5}^1 f(x)dx$ dada pela Regra dos Retângulos Repetida com 3 subintervalos (usados para efeitos de interpolação). Sombreie a área em questão usando um lápis e marque os nós de interpolação utilizados usando cruzeiros. [0.5 pt]



(b) $h = 0.5 = \frac{1}{2}$, $x_0 = -0.5$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1$

$$\int_{-0.5}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{4} [0.0044 + 2 \cdot 0.3989 + 2 \cdot 0.7001 + 0.484]$$

a

$$= \frac{1}{4} [0.0044 + 0.7978 + 1.4002 + 0.484]$$

$$= \frac{1}{4} [2.6867] = \underline{0.6718}$$