

MODELAGEM NUMÉRICA DE FRATURAMENTO HIDRÁULICO

Philippe R B Devloo* Paulo Dore Fernandes† Sônia M. Gomes‡
Cedric Marcelo Augusto Ayala Bravo§ Renato Gomes Damas ¶

11 de maio de 2004

1 Introdução

O fraturamento hidráulico em formações de alta permeabilidade vem se constituindo numa técnica altamente utilizada na Bacia de Campos, seja como estimulação de poços produtores, manutenção de injeção de água para recuperação secundária ou como alternativa à contenção de areia em formações pouco consolidadas. ([3])

Os simuladores matemáticos de fraturamento hidráulico adotam geometria bidimensional ou pseudo-tridimensional e não têm apresentado bons resultados em formações de alta permeabilidade e/ou fluidos de baixa eficiência. Este problema tem sido constatado nas análises de declínio de pressão realizadas após operações de frac-pack.

O presente relatório corresponde ao desenvolvimento de uma simulação numérica do fenômeno frack-pack de maior sofisticação, incluindo modelagem de resposta elástica do meio poroso e modelagem de propagação de fratura. Esta simulação envolve as seguintes etapas.

1. Definição do Modelo Matemático:

Os modelos propostos incluem a modelagem do escoamento do fluido dentro da fratura, da resposta elástica do meio poroso e da simulação da filtração do fluido de fraturamento para o meio poroso (leak-off). Especificamente, consideram-se as seguintes hipóteses.

- O volume de fluido é conservado. Esta lei de conservação relaciona o fluxo de fluido com a variação da área de fratura e a quantidade de fluido que vaza pelas paredes do poço.
- A abertura da fratura é uma consequência da pressão sobre suas paredes. Este fenômeno é a resposta elástica da rocha em torno da fratura.

*Faculdade de Engenharia Civil - UNICAMP, phil@fec.unicamp.br

†Cenpes - Petrobras, pdore@cenpes.petrobras.com.br

‡Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - UNICAMP, soniag@ime.unicamp.br

§Faculdade de Engenharia Civil - UNICAMP

¶Faculdade de Engenharia Civil - UNICAMP

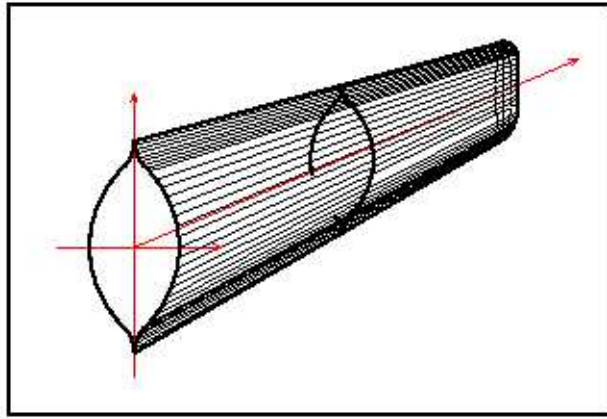


Figura 1: Fratura induzida hidráulicamente

2. Definição do Modelo Numérico:

Utilizam-se aproximações por elementos finitos para simular o escoamento do fluido dentro da fratura e para o acoplamento entre pressão e abertura da fratura.

3. Implementação Computacional do Modelo Numérico:

O aplicativo (PZ), baseado na técnica dos elementos finitos para a solução de problemas de valores de contorno e problemas de valores iniciais, é proposto como base para implementação dos algoritmos de aproximação. Como resultado, tem-se um software desenvolvido utilizando a filosofia de programação orientada para objetos e composto por módulos. Assim sendo, vários modelos podem ser incorporados e oferecidos ao usuário como opção de execução

1.1 Aspectos Geométricos

A fratura é uma região no espaço tridimensional que varia com o tempo. Considera-se a configuração para a fratura de um meio poroso como indicada na Figura 1. Adota-se o eixo x como a direção principal de propagação da fratura, o eixo z na vertical (na altura) e o eixo y na abertura da fratura. Desta forma, tem-se que a fratura ocupa a região

$$|y| \leq \frac{w(x, z, t)}{2},$$

em que $w(x, z, t)$ define a amplitude da abertura da fratura na direção do eixo y .

A visão de uma seção vertical, ortogonal ao eixo x de propagação da fratura, é mostrada na Figura 2 com um contraste simétrico de tensões de confinamento σ do tipo degrau. Indicam-se alguns parâmetros típicos a serem considerados: a altura da fratura é h e $H_r = 2b$ é a altura do reservatório.

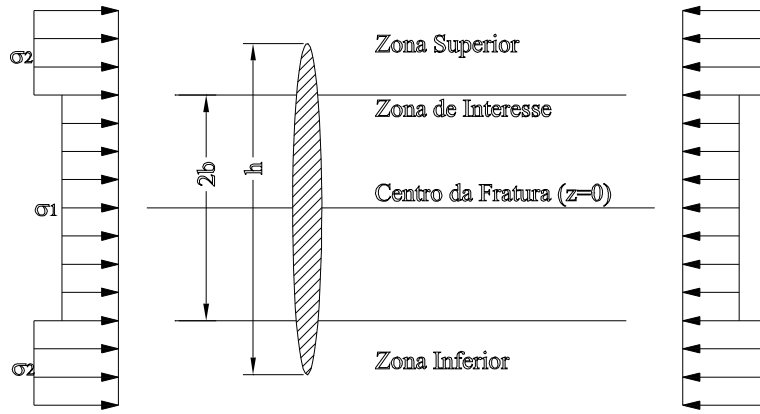


Figura 2: Configuração de fratura em meio poroso

2 Formulação Matemática

No modelo matemático, as quantidades principais a serem modeladas variam de acordo com as coordenadas espaciais x , ao longo do eixo principal de propagação da fratura, z na vertical e com o tempo t .

As equações que definem as relações entre as principais variáveis do modelo são descritas a seguir.

Resposta Elástica do Meio Poroso

A relação entre a pressão do fluido e a abertura da rocha é dada pela fórmula [1].

$$p(x, z, t) - \sigma(x, z) = \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial x^l} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial z^l} \right] dx^l dz^l, \quad (1)$$

em que $r = \sqrt{(x - x^l)^2 + (z - z^l)^2}$, G é o módulo de cisalhamento e ν é a razão de Poisson do material. Esta integral é singular e é considerada no sentido do valor principal de Cauchy.

Modelo para o fluxo de fluido

No interior da fratura, considera-se um fluxo bidimensional $\vec{q} = \vec{q}(x, z, t)$. Tipicamente, o fluxo depende do gradiente da pressão do fluido e da abertura da fratura. No modelo Newtoniano, esta dependência é dada por ([2])

$$\vec{q} = -\frac{w^3}{12\mu} \nabla p. \quad (2)$$

Para o modelo não Newtoniano, considera-se o modelo reológico de potência no qual o fluxo possui o seguinte comportamento

$$\vec{q} = \left(\frac{2\alpha}{1+2\alpha} \right) \left(\frac{1}{k} \right)^{1/\alpha} \left(\frac{w}{2} \right)^{\frac{1+2\alpha}{\alpha}} \|\nabla p\|^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \nabla p, \quad (3)$$

em que k é o índice de consistência do fluido e α é o grau de seu comportamento não Newtoniano. Quando $\alpha = 1$ o modelo corresponde ao caso Newtoniano.

Modelo de Carter para o leak-off e sua implementação

Em um processo de fraturamento hidráulico com 100% de eficiência de fluxo, todo o fluido injetado na fratura corresponde em aumento de volume de fratura. A fratura sendo induzida em um meio poroso, por onde o petróleo precisará escoar, perde-se uma parte do fluido de fraturamento para o meio poroso. O efeito desta filtração é comumente modelado por um modelo desenvolvido por Carter, em 1957. Em tal modelo, a perda de fluido, por unidade de tempo, para o meio poroso de uma área A , exposta no tempo τ , é igual a

$$q_l(t) = A \left(v_{sp} \delta(t - \tau) + \frac{\alpha}{2\sqrt{t - \tau}} \right), \quad (4)$$

em que α é o parâmetro definido no modelo de Carter e v_{sp} é o volume de fluido transmitido para o meio poroso instantaneamente após exposição ao fluido fraturante.

Para o cálculo diferencial é preciso trabalhar com a perda de volume por unidade de área. Denotamos então

$$Q_l(t) = \frac{q_l(t)}{A} \quad (5)$$

como fluxo leak-off por unidade de área. O volume transmitido para fluido filtrado pela área A entre os instantes t_1 e t_2 é dado por

$$V_l(t_1, t_2) = \begin{cases} Av_{sp} + A\alpha\sqrt{t_2 - \tau} & t_1 \leq \tau < t_2 \\ A\alpha(\sqrt{t_2 - \tau} - \sqrt{t_1 - \tau}) & \tau < t_1 \end{cases}$$

Lei de conservação de massa

A relação entre o fluxo de fluido na fratura \vec{q} , a abertura da fratura $w(x, z, t)$ e a quantidade de fluido Q_l que vaza pelas paredes do poço é dada pela lei de conservação

$$\text{div}(\vec{q}) + \frac{\partial w}{\partial t} + Q_l = 0. \quad (6)$$

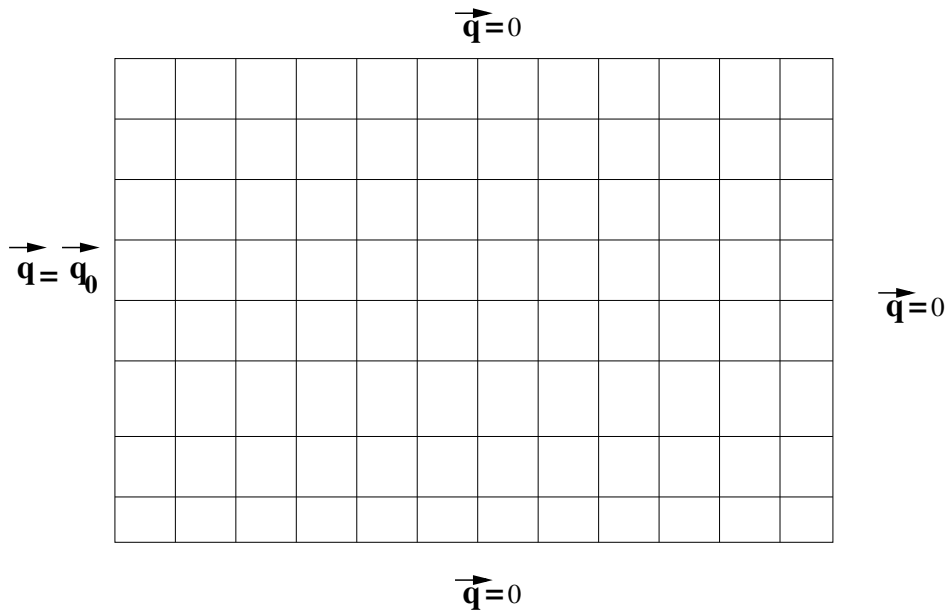


Figura 3: Região computacional e condições de fronteira.

3 Modelo de Elementos Finitos

Considera-se uma região computacional retangular Ω no plano $x \times z$, que deve ser suficientemente ampla para conter a fratura durante o período de tempo a ser analisado. Considera-se em Ω uma malha \mathcal{M} composta de pontos com distribuição regular. Conforme indicado na Figura 3, preceve-se o fluxo de fluido $\vec{q} = \vec{q}_0$ na lateral direita da região computacional, dado pelas condições de operação do fraturamento. Nas demais laterais, assume-se que o fluxo é nulo.

A discretização temporal também é feita em níveis regulares de tempo. Os dados com sub-índice i corresponden à posição espacial do ponto $(x_i, z_i) \in \mathcal{M}$ e o super-índice n corresponde a valores tomados no tempo $t^n = n\Delta t$.

Descrevem-se a seguir as várias etapas na obtenção do modelo numérico.

3.1 Formulação Discreta da Relação Pressão–Abertura

A relação entre os valores nodais da pressão e do deslocamento é estabelecida ao considerar que a pressão líquida $p - \sigma$ é localmente constante nas células R_j^* da malha \mathcal{M}^* justaposta à malha \mathcal{M} . Na Figura 7, se os retângulos em linha pontilhada formam a malha \mathcal{M} , é mostrado um retângulo típico da malha \mathcal{M}^* .

Consideram-se aproximações

$$w(x, z, t^n) = \sum_i w_i^n \Psi_i(x, z), \quad (7)$$

em que as funções $\Psi_i(x, z)$ formam a base de elementos finitos bilineares associada à malha \mathcal{M} . Cada uma destas funções básicas está localizadas nas quatro células da malha que possuem (x_i, z_i) como vértice comum.

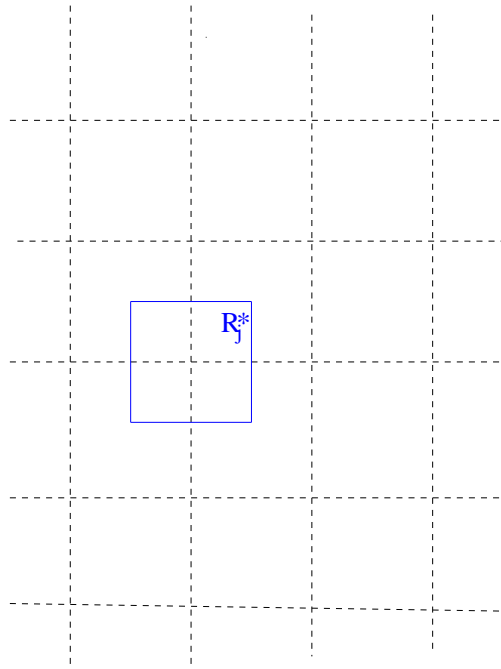


Figura 4: Malhas duais

Integrando a lei constitutiva (1) sobre cada R_j^* , e levando em consideração a expansão de w na base de elementos finitos bilineares associados a \mathcal{M} , obtém-se a relação

$$\begin{aligned}
 p_j^n &= \sigma_j + \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{m_j^*} \int_{R_j^*} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y^l} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial z} \right] dx dz dx^l dz^l \\
 &= \sigma_j + \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{m_j^*} \sum_i T_{ij} w_i^n,
 \end{aligned} \tag{8}$$

em que $m_j^* = \int_{R_j^*} dx dy$ e

$$T_{ij} = \int_{R_j^*} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^i}{\partial x^l} dx^l dz^l \right) dx dz + \int_{R_j^*} \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^i}{\partial y^l} dx^l dz^l \right) dx dz. \tag{9}$$

Sendo assim, o modelo discreto para o cálculo de p_i^{n+1} em termos dos valores da abertura w_i^{n+1} é dado por uma relação matricial linear

$$\mathbf{p}^{n+1} = \mathcal{T} \mathbf{w}^{n+1} + \Sigma, \tag{10}$$

em que $\Sigma = (\sigma_i)$ refere-se à pressão de confinamento da rocha. O detalhamento do cálculo de T_{ij} é feito no Apêndice. As Figuras 5 e 6 ilustram os resultados destes cálculos. Para um dado ponto, de índice i , são plotados os valores T_{ij} sob a influência de tal ponto. No primeiro caso a posição de i é central e no segundo exemplo sua localização fica no extremo inferior direito da malha.

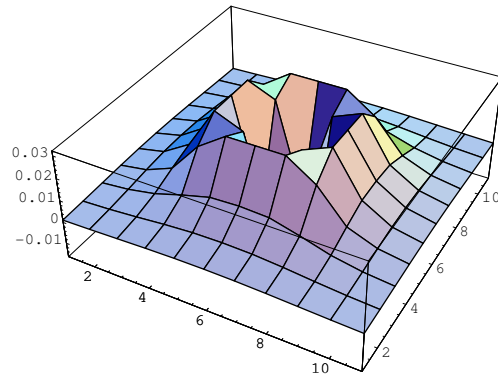


Figura 5: T_{ij} : o ponto i é central

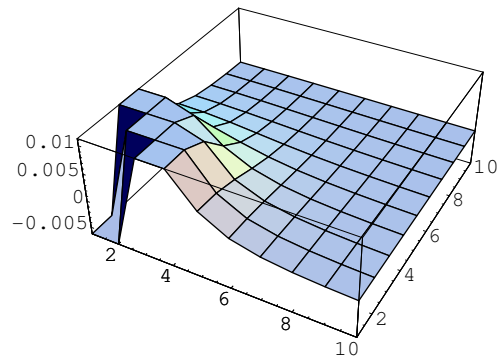


Figura 6: T_{ij} : o ponto i é o extremo inferior esquerdo

3.2 Esquema de Galerkin para a Lei de conservação

Multiplica-se a lei de conservação (6) por uma função teste e integra-se por partes obtendo a formulação variacional

$$\int_{\Omega} \left(-\nabla \Psi_i \cdot \vec{q} + \Psi_i \frac{\partial w(x, z, t)}{\partial t} + \Psi_i Q_l \right) dx dz + \vec{q} \Psi_i |_{\partial\Omega} = 0, \quad (11)$$

em que $\partial\Omega$ é a fronteira do domínio computacional.

Discretização Temporal e Espacial

Sejam w_i^n e p_i^n os valores de w e p nos pontos (x_i, z_i) da malha de discretização \mathcal{M} e no instante $t = t^n$. O modelo discreto tem como base aproximações em termos de elementos finitos bilineares.

Efetuando a derivada temporal por meio de diferença finita, aplicando o procedimento de diagonalização da matriz de massa (mass lumping), obtém-se o modelo discreto

$$- \int_{\Omega} \nabla \Psi_i \cdot \vec{q}^{n+1} dx dy + \bar{\Psi}_i \frac{w_i^{n+1} - w_i^n}{\Delta t} + \bar{\varphi}_i \int_{t_n}^{t_{n+1}} Q_{li} dt + \vec{q} \Psi_i |_{\partial\Omega} = 0, \quad (12)$$

em que $\bar{\Psi}_i = \int_{\Omega} \Psi_i dx dy$.

Levando em consideração a expressão do fluxo Newtoniano (2) ou não Newtoniano (3), e a dependência da pressão em termos da abertura da fratura dada na formula (10), a formulação discreta (12) pode ser expressa em termos de uma equação vetorial não linear envolvendo a abertura $\mathbf{w}^{n+1} = (w_i^{n+1})$ e a pressão $\mathbf{p}^{n+1} = (p_i^{n+1})$ da forma

$$\mathcal{G}(\mathbf{w}^{n+1}, \mathbf{p}^{n+1}) + \mathbf{F}_n^{n+1} = 0. \quad (13)$$

As componentes de $\mathcal{G}(\mathbf{w}, \mathbf{p}) = (\mathcal{G}_i(\mathbf{w}, \mathbf{p}))$ resultam da soma de dois termos

$$\mathcal{G}_i(\mathbf{w}, \mathbf{p}) = -\Delta t \int_{\Omega} \nabla \Psi_i \cdot \vec{q} dx dy + \bar{\Psi}_i w_i. \quad (14)$$

O primeiro termo contém informação sobre a conservação de massa em um período de tempo Δt devido ao fluxo de fluido nas quatro células em torno do ponto (x_i, y_i) , enquanto que o segundo traduz o acúmulo de massa nestas células. No cálculo destas componentes, adota-se a aproximação do gradiente da pressão por elementos finitos

$$\nabla p(x, z, t^n) = \sum_i p_i^n \nabla \Psi_i(x, z).$$

As componentes da forçante \mathbf{F}_n^{n+1} são

$$\left(\mathbf{F}_n^{n+1} \right)_i = -\bar{\varphi}_i w_i^n + \Delta t \bar{\varphi}_i \int_{t_n}^{t_{n+1}} Q_{li} dt + \Delta t \vec{q} \varphi_i |_{\partial\Omega},$$

que contém informações sobre as condições de contorno e a perda de fluido através das paredes da fratura (*leak off*).

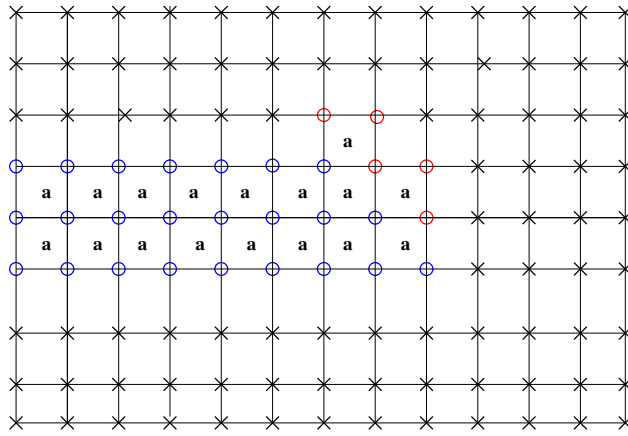


Figura 7: Propagação da fratura

3.3 Algoritmo de Evolução Temporal

O algoritmo de evolução temporal $(\mathbf{w}^n, \mathbf{p}^n) \longrightarrow (\mathbf{w}^{n+1}, \mathbf{p}^{n+1})$ é composto de três partes principais.

3.3.1 Algoritmo de Propagação da Fratura

No nível de tempo t^n , classificam-se os pontos (x_i, y_i) da malha computacional em três tipos

- Pontos abertos: são aqueles no interior da fratura, em que $w(x_i, y_i, t^n) > 0$
- Pontos passíveis de abertura: em que $w(x_i, y_i, t) = 0$ mas o resíduo da lei de conservação está acima de um dado nível de tolerância ϵ ;
- Pontos fechados: são aqueles que não são abertos nem passíveis de abertura.

Na Figura 7, apresenta-se um exemplo ilustrativo, em que indicam-se os pontos abertos com um círculo em azul, os pontos passíveis de abertura com um círculo vermelho e os pontos fechados com um x .

Levando-se em conta esta classificação, e para se fazer a evolução temporal de t a t^{n+1} , adota-se a seguinte convenção para o cálculo do fluxo de fluido, em cada célula da malha computacional.

- Se os quatro nós da célula são abertos, ou passíveis de abertura, calcula-se o fluxo pela fórmula do modelo reológico de potência (células marcada com a letra **a** na Figura 7).
- Se algum dos quatro nós da célula for um ponto fechado, considera-se o fluxo nulo em tal célula (todas as células sem marca na Figura 7)

Com este critério, o modelo permite a abertura de, no máximo uma camada de células, em cada passo de tempo.

3.3.2 Ajuste do Algoritmo de Newton

O princípio do ajuste consiste em eliminar do cálculo os nós onde a solução é negativa. Para isto, deve-se verificar, em cada iteração do método de Newton, o valor da aproximação produzida. Caso ocorra, em alguma posição, um valor negativo, considera-se tal ponto fechado, impondo a condição de contorno de Dirichlet nula, e ajusta-se a solução para a nova configuração. Desta forma, faz-se necessário reconstruir a matriz de rigidez e o vetor de carregamento para recalculá-la na nova configuração. Este processo é repetido até obter um resíduo suficientemente pequeno.

Após isto, toma-se o cuidado de verificar se na solução encontrada, alguns nós que estão fechados poderiam ser abertos. Um nó somente abrirá quando a quantidade de fluido transportado para ele for superior à quantidade de fluido que ele pode absorver por leak-off. Para o cálculo do leak-off em nós fechados, calcula-se o vetor de carregamento, sem aplicar condição de contorno. O leak-off é então calculado baseado no valor do vetor de carregamento (fluxo de Neumann). Quando o fluxo que chega no nó é maior que sua capacidade absorção ele é designado aberto e as iterações de Newton são reiniciadas.

O algoritmo termina quando a norma do resíduo é pequena e não existe nenhum nó passível de abertura.

Detalhes Sobre a Implementação Computacional

Para a implementação computacional do método de Newton, levam-se em consideração os seguintes aspectos.

- apresentam-se os detalhes para as expressões das componentes matriciais K_{ij}^w e K_{ij}^p para o caso de fluxos não-newtonianos de potência de interesse neste trabalho. As submatrizes tangenciais \mathcal{K}^w e \mathcal{K}^p são esparsas, visto que seus elementos \mathcal{K}_{ij}^w e \mathcal{K}_{ij}^p se anulam quando as funções básicas Ψ_i e Ψ_j não se interagem (i.e. não possuem células comuns em seus suportes). Por outro lado, para o caso do operador de acoplamento entre a pressão e a abertura da fratura, por ser um operador integral, a matriz de discretização \mathcal{T} é de caráter global. Ou seja, o valor da abertura em um determinado ponto influencia o cálculo da pressão em todos os demais pontos da malha. No entanto, afastando-se do ponto, ocorre um decaimento no grau de influência o qual pode ser desprezado, a partir de uma certa distância. Desta forma, a matriz \mathcal{T} efetivamente implementada é também uma matriz esparsa.
- Tendo em vista a relação matricial em (10) e o modelo discreto da lei de conservação em (13), poder-se-ia pensar em obter um esquema que combinasse ambas equações em apenas uma, a qual envolveria somente os valores da abertura da fratura, como feito em relatórios anteriores. No entanto, um tal procedimento, acarretaria na perda de esparsidade das novas matrizes tangenciais, prejudicando a eficiência computacional do método. Portanto, com o objetivo de facilitar a implementação computacional no ambiente PZ, considera-se conveniente manter o modelo com as duas equações (13) e (10), envolvendo explicitamente tanto a abertura quanto a pressão, como se fossem variáveis independentes. Portanto, as variáveis importantes do problema são os valores nodais da pressão p_i^n e da abertura da fratura w_i^n , que são consideradas separadamente. Se

n o número de pontos da malha computacional, então utilizam-se vetores de dimensão $2n$ para armazenar os dados do problema.

- Para a solução dos sistemas lineares que ocorrem na evolução temporal do modelo numérico o método iterativo GMRES é apropriado.
- No caso específico do sistema (??), a matriz de iteração é da forma

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}^w & \mathcal{K}^p \\ -\mathcal{T} & I \end{pmatrix}.$$

em que todas as sub-matrizes \mathcal{K}^w e \mathcal{K}^p e \mathcal{T} são esparsas. No ambiente PZ, as operações com tais matrizes são efetuadas por diferentes tipos de objetos. Observa-se também que, no caso em questão, aquelas componentes do resíduo referentes à pressão são sempre nulas. Desta forma, considera-se conveniente a utilização da seguinte estrutura de dados.

- Considera-se o armazenado de dados em vetores $[wp]$, de dimensão $2n$, intercalando-se as informações referentes à abertura e à pressão em cada ponto da malha. Este efeito é produzido pela operação de **merge**

$$[wp] = \mathbf{merge}(\mathbf{w}, \mathbf{p}) = \{w_1, p_1, w_2, p_2, \dots\}.$$

- Constroi-se-se uma matriz $[\mathcal{K}]$ de dimensão $2n \times 2n$, intercalando-se linhas nulas com linhas não nulas, de tal forma que o efeito da multiplicação

$$[\mathcal{K}][wp]$$

seja um vetor contendo os valores resultantes da aplicação $\mathcal{K}^w \mathbf{w} + \mathcal{K}^p \mathbf{p}$ intercalados com componentes nulas. Precisamente, sendo $\ell_m([\mathcal{K}])$ a m -ésima linha de $[\mathcal{K}]$, tem-se que

1. $\ell_m([\mathcal{K}])$ é nula se m for par;
 2. $\ell_m([\mathcal{K}]) = \mathbf{merge}(\ell_m(\mathcal{K}^w), \ell_m(\mathcal{K}^p))$, se m for ímpar.
- Dado um vetor $[r]$ de dimensão $2n$, considera-se também uma operação reversa de decimação **dec**($[r]$) que remove de $[r]$ as componentes de índice par.

Sendo assim, em cada passo do método GMRES, faz-se o cálculo do resíduo executando as seguintes operações .

1. Conhecendo-se \mathbf{w}_k , calcula-se

$$\mathbf{p}_k = \mathcal{T}(\mathbf{w}_k) + \Sigma$$

2. Define-se $[wp] = \mathbf{merge}(\mathbf{w}_k, \mathbf{p}_k)$ e $[b] = \mathbf{merge}(\mathbf{b}, 0)$

3. Calcula-se o resíduo

$$[r] = [b] - [\mathcal{K}][wp]_k$$

4. Define-se $\mathbf{r}_k = \mathbf{dec}([r])$.

4 Apêndice: Modelo Discreto da Relação Pressão-Abertura

Conforme indicado na descrição do modelo 3D, a dependência entre os valores discretos da pressão e os da abertura da fratura é dada pela fórmula

$$\begin{aligned} p_j^n &= \sigma_j + \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{m_j^*} \int_{R_j^*} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x^l} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y^l} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial w}{\partial z} \right] dx dz dx^l dz^l \\ &= \sigma_j + \frac{G}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{m_j^*} \sum_i T_{ij} w_i^n, \end{aligned}$$

em que $m_j^* = \int_{R_j^*} dx dy$, σ_j são os valores da pressão de confinamento e

$$T_{ij} = \int_{R_j^*} \frac{\partial A^i(x, y)}{\partial x} dx dz + \int_{R_j^*} \frac{\partial B^i(x, z)}{\partial z} dx dz, \quad (15)$$

com

$$A^i(x, z) = \int_{R_j^*} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^i}{\partial x^l} dx^l dz^l, \quad (16)$$

$$B^i(x, z) = \int_{R_j^*} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^i}{\partial z^l} dx^l dz^l. \quad (17)$$

Para obter os valores T_{ij} , integra-se o primeiro termo em (15) na variável x e o segundo termo na variável z . Denotando $R_j^* = [u, v] \times [s, t]$, tem-se que

$$T_{ij} = \int_s^t [A^i(v, x) - A^i(u, x)] dx + \int_u^v [B^i(x, t) - B^i(x, s)] dx.$$

Denominando o suporte de $\Psi^i(x)$ por $Supp(\Psi^i)$, consideram-se dois casos.

1. $R_j^* \cap Supp(\Psi^i) = \emptyset$: Neste caso, não ocorre singularidade no termo $\frac{1}{r}$ sobre as laterais de R^* e todas as integrais podem ser calculadas por uma regra de quadratura gaussiana usual.
2. $R_j^* \cap Supp(\Psi^i) \neq \emptyset$: Neste caso, o termo $\frac{1}{r}$ pode ser singular. A idéia é usar quadratura gaussiana apenas na integral externa, calculando a integral interna exatamente, para cada ponto de quadratura.

Descrevem-se, a seguir, os passos a serem seguidos no cálculo de T_{ij} no caso singular.

Caso Singular

Considera-se primeiro a integral do tipo

$$\int_s^t A^i(x, z) dz.$$

As demais são feitas de forma análoga.

Dada uma fórmula de quadratura

$$\int_s^t f(z)dz \approx \sum_{P \in \mathcal{S}} \gamma_P f(P),$$

considera-se a aproximação

$$\int_s^t A^i(x, z)dz \approx \sum_{P \in \mathcal{S}} \gamma_P A^i(P),$$

em que

$$A^i(P) = \int_{Sup(\Psi^i)} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^i}{\partial x^l} dx^l dz^l.$$

Observa-se que $r = r(P, P^l) = \sqrt{(x^* - x^l)^2 - (z^* - z^l)^2} = \|P - P^l\|$, em que $P = (x^*, z^*)$ é um ponto de quadratura sobre a lateral de R^* e $P^l = (x^l, z^l)$ representam os pontos do suporte de Ψ^i .

Pela forma bilinear das funções da base, o suporte de Ψ^i é formado por quatro retângulos da malha \mathcal{M} . Em cada um desses retângulos, suas derivadas parciais com relação a uma das variáveis é um polinômio de grau 1, que depende apenas da outra variável. Por exemplo, $\frac{\partial \Psi^i}{\partial x^l}$ é um polinômio de grau um na variável z^l . Portanto, no cálculo de $A^i(P)$ consideram-se integrais do tipo

$$J_{(1)}(P) = \int_{\mathcal{R}} \frac{1}{r} dx^l dz^l \quad (18)$$

$$J_{(2)}(P) = \int_{\mathcal{R}} \frac{z^l}{r} dx^l dz^l \quad (19)$$

sobre os quatro retângulos \mathcal{R} da malha \mathcal{M} que formam o suporte de Ψ^i .

Recorda-se que o caso de interesse aqui é o singular, em que o ponto P está em \mathcal{R} . Consideram-se coordenadas polares com origem em $P = (x^*, z^*)$

$$\begin{cases} x^l = x^* + r \cos \theta \\ z^l = z^* + r \sin \theta \end{cases}.$$

Se P está o interior de \mathcal{R} , separam-se as integrais em (22) e (23) nos quatro triângulos Δ_k , $k = 1, 2, 3$ e 4 , definidos pelas linhas diagonais que unem o ponto P aos vértice do retângulo \mathcal{R} . Como indicado na Figura 8, denota-se por θ_k o ângulo formado por estas diagonais com o eixo $z = z^*$. Para $k = 1, 2$ e 3 toma-se o sentido anti-horário de tal forma que $0 < \theta_1 < \pi/2 < \theta_2 < \pi < \theta_3 < 3\pi/2$. Para $k = 4$, considera-se o ângulo $-\pi/2 < \theta_4 < 0$, no sentido horário. Valem as seguintes relações:

$$tg \theta_1 = \frac{b}{a} \quad tg \theta_2 = -\frac{b}{a}$$

$$tg \theta_3 = \frac{\beta}{\alpha} \quad tg \theta_4 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Restringindo $J_{(1)}(P)$ no subdomínio Δ_1 , obtém-se

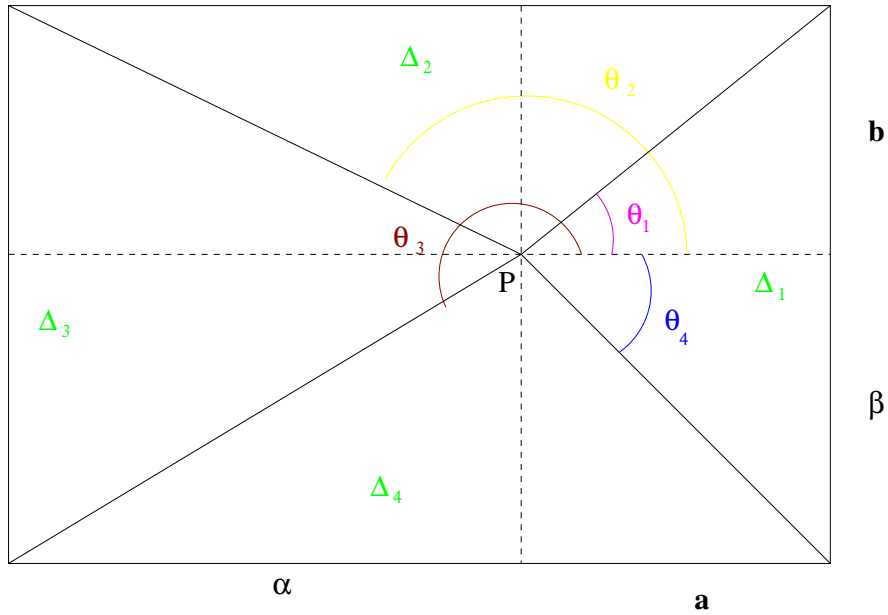


Figura 8: Regiões de integração no elemento retangular \mathcal{R} . ($P = (x^*, y^*)$ é o ponto de quadratura da lateral de R^*)

$$J_{(1,1)} = \int_{\Delta_1} \frac{1}{r} dx dz = \int_{\theta_4}^{\theta_1} \int_0^{r(\theta)} \frac{1}{r} r dr d\theta = \int_{\theta_4}^{\theta_1} r(\theta) d\theta,$$

em que $r(\theta)$ é o raio máximo em cada direção θ . Em Δ_1 , tem-se que

$$r(\theta) = \frac{a}{\cos \theta}$$

Consequentemente,

$$J_{(1,1)} = a \int_{\theta_4}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\cos \theta}.$$

Pelas técnicas usuais de integração, resulta que

$$\begin{aligned} \int_{\theta_4}^{\theta_1} \frac{d\theta}{\cos \theta} &= \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| \Big|_{\theta_4}^{\theta_1} \\ &= \left\{ \ln \left| \frac{1}{\cos \theta_1} + \frac{b}{a} \right| - \ln \left| \frac{1}{\cos \theta_4} - \frac{\beta}{a} \right| \right\}. \end{aligned}$$

Levando em consideração que

$$\cos \theta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \cos \theta_4 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \beta^2}},$$

conclui-se que

$$J_{(1,1)} = a \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{\sqrt{a^2 + \beta^2} - \beta} \right| \right\}. \quad (20)$$

Analogamente, para $k = 2, 3$ e 4

$$J_{(1,k)} = \int_{\Delta_k} \frac{1}{r} dx dz = \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} r(\theta) d\theta,$$

em que

$$r(\theta) = \begin{cases} \frac{b}{\sin \theta} & k = 2 \\ -\frac{\alpha}{\cos \theta} & k = 3 \\ -\frac{\beta}{\sin \theta} & k = 4. \end{cases}$$

Portanto, levando em consideração que

$$\begin{aligned} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sin \theta} &= \ln |\operatorname{cosec} \theta - \cotg \theta|_{\theta_1}^{\theta_2} \\ &= \left\{ \ln \left| \frac{1}{\sin \theta_2} + \frac{\alpha}{b} \right| - \ln \left| \frac{1}{\sin \theta_1} - \frac{a}{b} \right| \right\}, \end{aligned}$$

e que

$$\sin \theta_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \theta_2 = \frac{b}{\sqrt{\alpha^2 + b^2}},$$

conclui-se que

$$J_{(1,2)} = b \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 + \alpha^2} + \alpha}{\sqrt{b^2 + a^2} - a} \right| \right\}.$$

Observa-se que esta fórmula pode ser obtida diretamente da fórmula anterior, bastando em $J_{(1,1)}$ fazer as substituições $a = b$, $b = \alpha$, $\beta = a$. Seguindo o mesmo procedimento, para o cálculo de $J_{(1,3)}$ é suficiente fazer em (20) as substituições $a = \alpha$, $b = \beta$, $\beta = b$ para obter

$$J_{(1,3)} = \int_{\Delta_3} \frac{1}{r} dx dz = \alpha \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \beta}{\sqrt{\alpha^2 + b^2} - b} \right| \right\}.$$

Por último, fazendo as substituições $a = \beta$, $b = a$, $\beta = \alpha$, conclui-se que

$$J_{(1,4)} = \int_{\Delta_4} \frac{1}{r} dx dz = \beta \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt{\beta^2 + a^2} + a}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2} - \alpha} \right| \right\}. \quad (21)$$

Em resumo,

$$\begin{aligned} J_{(1)}(P) &= J_{(1,1)} + J_{(1,2)} + J_{(1,3)} + J_{(1,4)} \\ &= a \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + b}{\sqrt{a^2 + \beta^2} - \beta} \right| \right\} \\ &+ b \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 + \alpha^2} + \alpha}{\sqrt{b^2 + a^2} - a} \right| \right\} \\ &+ \alpha \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \beta}{\sqrt{\alpha^2 + b^2} - b} \right| \right\} \\ &+ \beta \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt{\beta^2 + a^2} + a}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2} - \alpha} \right| \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Observação: Fazendo o ponto P aproximar-se das laterais do retângulo \mathcal{R} , é necessário considerar formulas assintóticas correspondentes. Por exemplo, seja P um ponto sobre a lateral à direita, de tal forma que $a = 0$, $\theta_1 = \pi/2$ e $\theta_4 = -\pi/2$, Portanto, tem-se que $J_{(1,1)} = 0$, $J_{(1,3)}$ fica da mesma forma e

$$J_{(1,2)} = b \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 + \alpha^2} + \alpha}{b} \right|$$

$$J_{(1,4)} = \beta \ln \left| \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2} - \alpha} \right|.$$

No caso da integral $J_{(2)}(P)$, tem-se que

$$J_{(2)}(P) = \int_R \frac{y}{r} dx dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\theta)} \frac{y^* + r \sin \theta}{r} r dr d\theta$$

$$= y^* J_{(1)}(P) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin \theta r(\theta)^2 d\theta.$$

Novamente, subdivide-se a segunda integral do lado direito da equação acima nas sub-regiões Δ_k . Para $\theta_4 \leq \theta \leq \theta_1$ tem-se que

$$\int_{\theta_4}^{\theta_1} \sin \theta r(\theta)^2 d\theta = a^2 \int_{\theta_4}^{\theta_1} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= -a^2 \int_{\cos \theta_4}^{\cos \theta_1} \frac{1}{u^2} du$$

$$= a^2 \left\{ \frac{1}{\cos \theta_1} - \frac{1}{\cos \theta_4} \right\}$$

$$= a \left\{ \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + \beta^2} \right\}$$

Na segunda região tem-se que

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta r(\theta)^2 d\theta = b^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\sin \theta} d\theta$$

$$= b^2 \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 + \alpha^2} + \alpha}{\sqrt{b^2 + a^2} - a} \right| \right\}$$

Procedimentos análogos conduzem às fórmulas

$$\int_{\theta_2}^{\theta_3} \sin \theta r(\theta)^2 d\theta = \alpha^2 \int_{\theta_2}^{\theta_3} \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$= \alpha \left\{ \sqrt{\alpha^2 + b^2} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right\}$$

$$\int_{\theta_3}^{\theta_4} \sin \theta r(\theta)^2 d\theta = \beta^2 \int_{\theta_3}^{\theta_4} \frac{1}{\sin \theta} d\theta$$

$$= \beta^2 \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + \beta^2} - a}{\sqrt{a^2 + \beta^2} + \alpha} \right| \right\}$$

Portanto, conclui-se que

$$\begin{aligned}
J_{(2)}(P) &= y^* J_{(1)}(P) \\
&+ \frac{1}{2} \left\{ a \left[\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + \beta^2} \right] \right. \\
&+ b^2 l \left| \frac{\sqrt{b^2 + \alpha^2} + \alpha}{\sqrt{b^2 + a^2} - a} \right| \\
&+ \alpha \left[\sqrt{\alpha^2 + b^2} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right] \\
&+ \left. \beta^2 \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + \beta^2} - a}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha} \right| \right\} \tag{23}
\end{aligned}$$

4.0.3 Translação e Escalonamento

O objetivo agora é estabelecer fórmulas de conexão entre os valores de T_{ij} quando diferentes malhas são geradas, a partir da malha de referência, por operações usuais de escalonamento.

Em primeiro lugar, considera-se a questão de relacionar os valores T_{ij} , associados com o i -ésimo ponto da malha, de coordenadas $(m\Delta x, n\Delta z)$, com os valores $T_{0\ell}$ dos coeficientes associados ao ponto de referência $(0, 0)$. Primeiro, observa-se que as funções da base de elementos finitos $\Psi_i(x^l, z^l)$ são as transladadas da função básica de referência Ψ_0 . Precisamente,

$$\Psi_i(x^l, z^l) = \Psi_0(\bar{x}^l, \bar{z}^l),$$

em que considera-se a mudança de coordenadas

$$\bar{x}^l = x^l - m\Delta x, \quad \bar{z}^l = z^l - n\Delta z.$$

Adotando este novo sistema de coordenadas nas equações (16) e (17), e observando que

$$r = \sqrt{(x - x^l)^2 + (z - z^l)^2} = \sqrt{((x - m\Delta x) - \bar{x}^l)^2 + ((z - n\Delta z) - \bar{z}^l)^2},$$

resulta que

$$\begin{aligned}
A_i(x, z) &= A_0(x - m\Delta x, z - n\Delta z) \\
B_i(x, z) &= B_0(x - m\Delta x, z - n\Delta z).
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo essas expressões em (15), e supondo que R_j^* é o retângulo centrado no j -ésimo ponto de coordenadas $(p\Delta x, q\Delta z)$, conclui-se que

$$T_{ij} = T_{0\ell}$$

em que ℓ é o índice correspondente ao ponto de coordenadas $((p - m)\Delta x, (q - n)\Delta z)$.

Conhecidos os valores T_{ij} associados a uma certa malha \mathcal{M} , com espaçamentos Δx e Δz , é de interesse saber relacioná-los aos valores T_{ij}^λ correspondentes à malha re-escalada \mathcal{M}^λ , com espaçamentos $\Delta x/\lambda$ e $\Delta z/\lambda$. Tendo em vistas as propriedades de translação descritas anteriormente, é suficiente conhecer tais relações no caso do ponto de referência $(0, 0)$.

Sabe-se que

$$\Psi_0^\lambda(x^l, z^l) = \Psi_0(\lambda x^l, \lambda z^l).$$

Portanto

$$\frac{\partial \Psi_0^\lambda}{\partial x^l}(x^l, z^l) = \lambda \frac{\partial \Psi_0}{\partial x^l}(\lambda x^l, \lambda z^l).$$

Observa-se também que

$$r = \sqrt{(x - x^l)^2 + (z - z^l)^2} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{(\lambda x - \lambda x^l)^2 + (\lambda z - \lambda z^l)^2}.$$

Essas expressões conduzem a que

$$\begin{aligned} A_0^\lambda(x, z) &= \int_{\text{supp}\Psi_0^\lambda} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_0^\lambda}{\partial x^l} dx^l dz^l \\ &= \lambda^2 \int_{\text{supp}\Psi_0^\lambda} \frac{\frac{\partial \Psi_0}{\partial x^l}(\lambda x^l, \lambda z^l)}{\sqrt{(\lambda x - \lambda x^l)^2 + (\lambda z - \lambda z^l)^2}} dx^l dz^l \\ &= \int_{\text{supp}\Psi_0} \frac{\frac{\partial \Psi_0}{\partial x^l}(x^l, z^l)}{\sqrt{(\lambda x - x^l)^2 + (\lambda z - z^l)^2}} dx^l dz^l \\ &= A_0(\lambda x, \lambda z). \end{aligned}$$

Analogamente, tem-se que $B_0^\lambda(x, z) = B_0(\lambda x, \lambda z)$. Consequentemente, se $R_\ell^{\lambda*}$ é um retângulo da malha dual $\mathcal{M}^{\lambda*}$, centrado no ponto de coordenadas $(p\Delta x/\lambda, q\Delta z/\lambda)$, tem-se que

$$\begin{aligned} T_{0,\ell}^\lambda &= \int_{R_\ell^{\lambda*}} \frac{\partial A_0^\lambda}{\partial x}(x, z) dx dz + \int_{R_\ell^{\lambda*}} \frac{\partial B_0^\lambda}{\partial z}(x, z) dx dz \\ &= \lambda \int_{R_\ell^{\lambda*}} \frac{\partial A_0}{\partial x}(\lambda x, \lambda z) dx dz + \lambda \int_{R_\ell^{\lambda*}} \frac{\partial B_0}{\partial z}(\lambda x, \lambda z) dx dz \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{R_j^*} \frac{\partial A_0}{\partial x}(x, z) dx dz + \int_{R_j^*} \frac{\partial B_0}{\partial z}(x, z) dx dz \\ &= \frac{1}{\lambda} T_{0,j} \end{aligned}$$

em que j é o índice associado ao ponto $(p\Delta x, q\Delta z)$ da malha \mathcal{M} .

Referências

- [1] H. D. Bui. An integral equation method for solving the problem of a plane crack of arbitrary shape. *J. Mech. Phys. Solids*, 25:29–39, 1977.
- [2] T. K. Perkins and L. R. Kern. Widths of hydraulic fractures. *Journal of Petroleum Technology*, pages 937–949, September 1961.
- [3] Jr. R. W. Veatch, Z. A. Moschovidis, and C. R. Fast. An overview of hydraulic fracturing. In S. A. Holditch, D. E. Nierode, and R. W. Veatch Jr., editors, *Recent Advances in Hydraulic Fracturing*, volume 12, pages 1–38. Society for Petroleum Engineering, 1989.