

Wavelets e Seu Impacto em Compressão de Sinais e Imagens

Sônia Maria Gomes

IMECC-UNICAMP

Sumário

Introdução

- Codificação por transformadas: princípios básicos, breve históricos sobre FT e WT

Análise de Fourier

- Aspectos principais, DFT, FFT, DCT, Teoremas de de Convolução e Filtros.

Análise Wavelet

- Wavelets Ortogonais de Daubechies, DWT (banco de filtros), compressão de dados

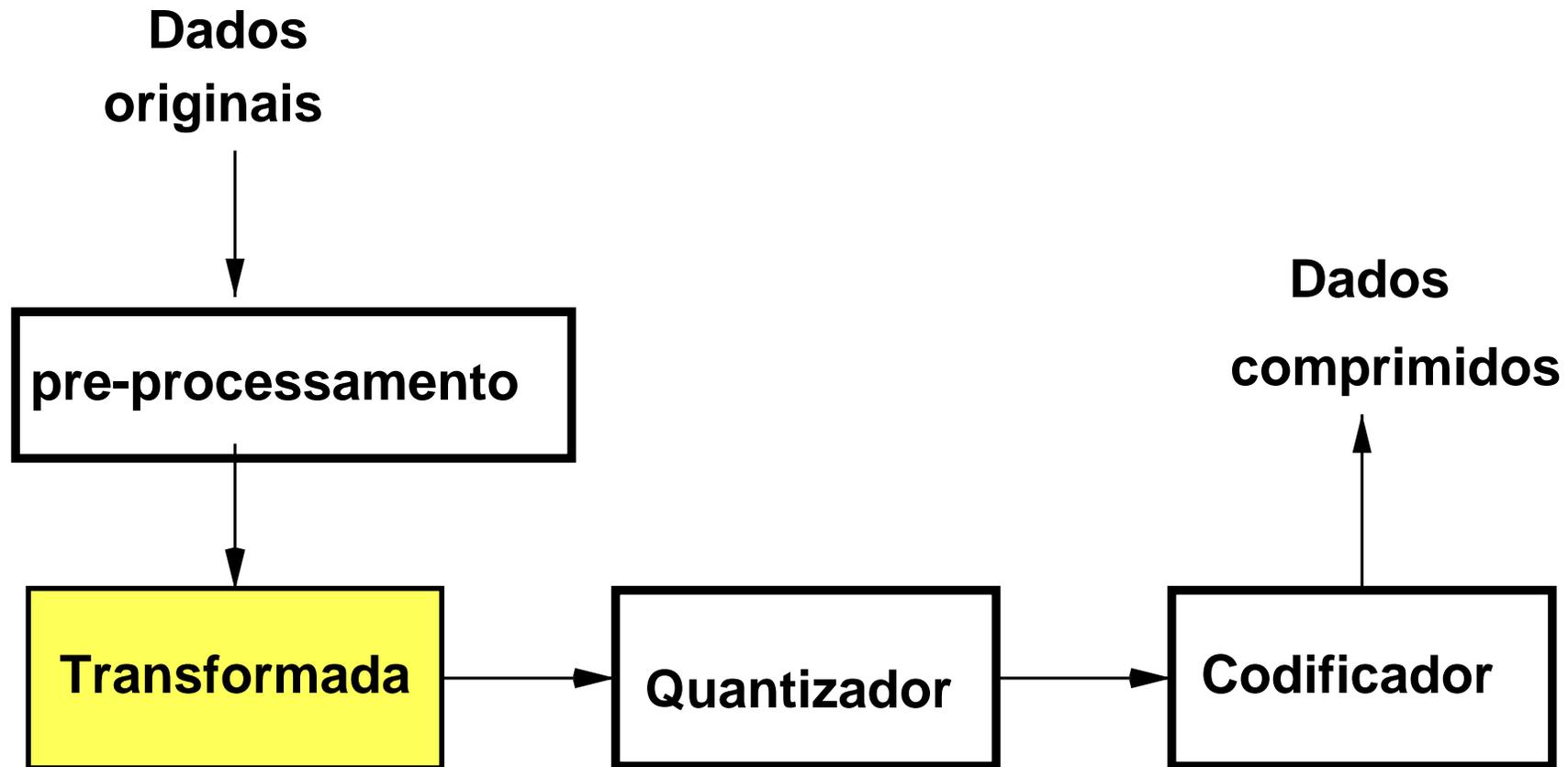
Introdução

Codificação de Sinais

- **Princípio básico** É como reduzir um litro de leite a algumas gramas de leite em pó. O sabor da bebida restaurada é parecido com o sabor de leite, mas algumas sutilezas são perdidas.
- **Objetivo** Dada uma taxa de compressão, comprimir o sinal com o mínimo de distorção.
- **Principais aplicações** Armazenamento e transmissão de dados.

Codificação por Transformadas

Etapas Básicas

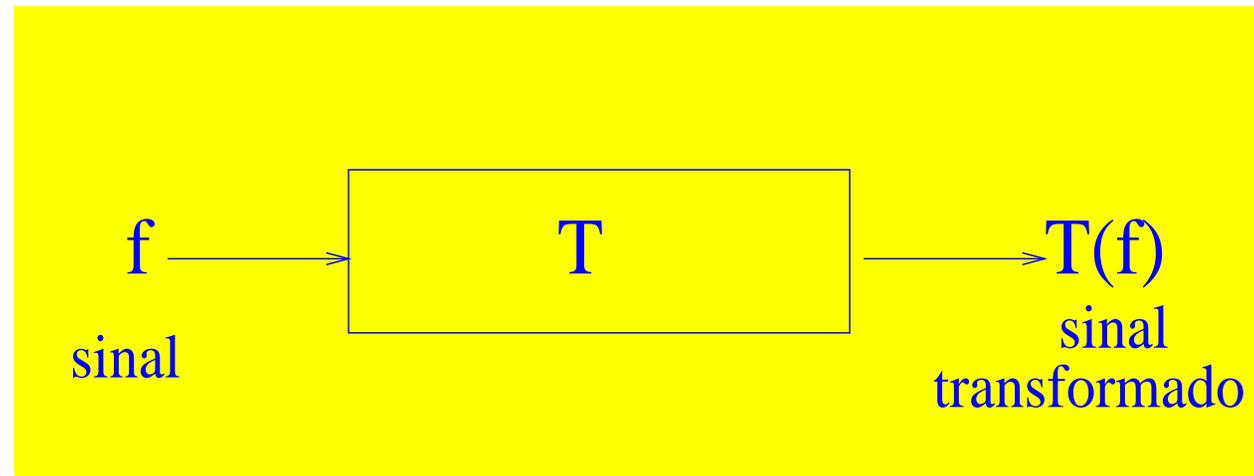


Codificação por Transformadas

Etapas Básicas

- **Transformação** O objetivo é eliminar a redundâncias (correlações) existentes no sinal.
- **Quantização e Alocação de Bits** Substitui-se cada coeficiente obtido na transformação por uma variável quantizada, que toma valores num conjunto finito de números reais. Os coeficientes quantizados são codificados com um número finito de bits, da maneira mais eficiente possível, de forma a minimizar a taxa de distorção.
- **Codificação** Ordenam-se os dados de maneira adequada para o armazenamento ou a transmissão.

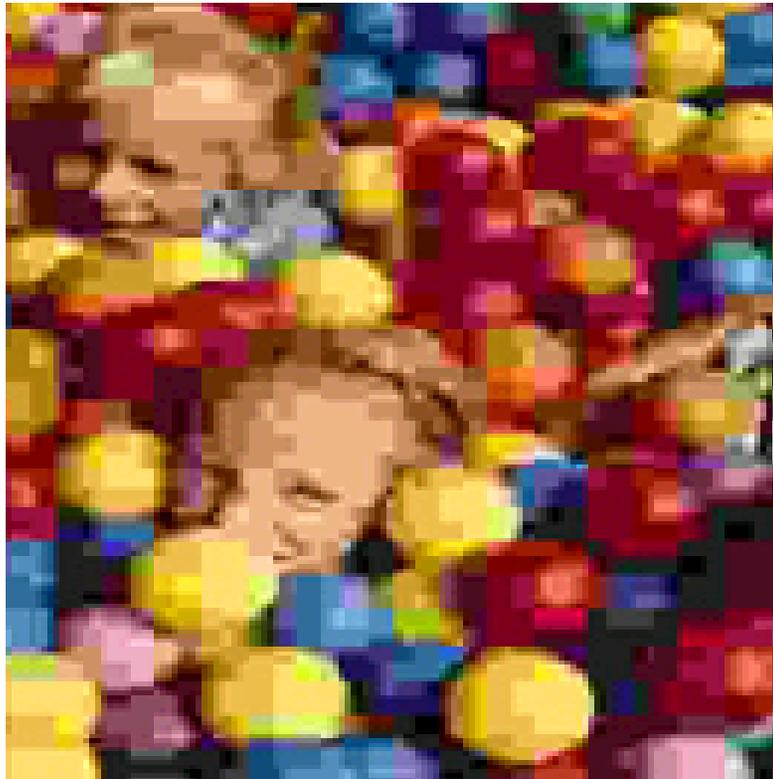
Transformadas



Casos de interesse:

- Transformada de **Fourier**
- Transformada **wavelet**

JPEG (DCT)



JPEG2000(DWT)



6.1KB (Taxa de compressão = 115 : 1)

JPEG (Joint Photographic Experts Group)

Análise de Fourier

Aspecto Discreto

$$f_k \Leftrightarrow \hat{f}_k \quad \hat{f} = \frac{1}{N} \bar{F}_N f$$

Aspecto Funcional

$$f(x) \approx \sum_k \hat{f}_k e^{ikx}$$

Análise Wavelet

Aspecto Discreto

$$f^{j+1} \iff \{f^0, d^0, \dots, d^j\}$$

Aspecto Funcional

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \sum_k f_k^j \phi(2^j x - k) \\ &= \sum_k f_k^0 \phi(x - k) + \sum_{l=0}^j d_k^l \psi(2^l - k) \end{aligned}$$

Semelhanças:

- Sinais são analisados por expansões em termos de funções básicas.
- Algoritmos rápidos

Diferenças:

- Fourier: localização no domínio das frequências.
- Wavelet: dupla localização (domínio das frequências e domínio temporal).

| Características | Fourier | Wavelets |
|-------------------------|-----------|-------------------|
| base | e^{ikt} | $\psi(2^j t - k)$ |
| ortogonalidade | sim | sim |
| completude | sim | sim |
| autofunções importantes | sim | não |
| algoritmos rápidos | sim | sim |
| localização | ξ | $t \times \xi$ |

Histórico

Análise de Fourier

1810 Joseph Fourier



1965 Cooley e Tuckey (FFT)

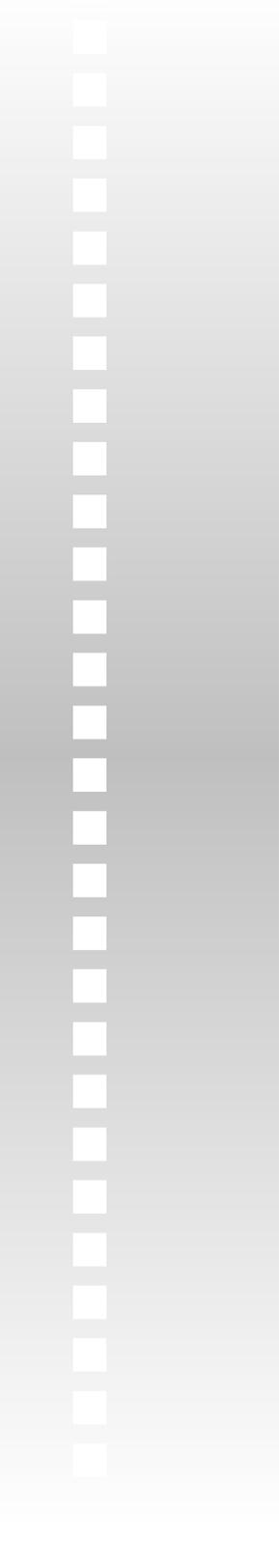
Análise Wavelet

1984 Morlet e Grossmann



Meyer, Mallat, Daubechies, etc..



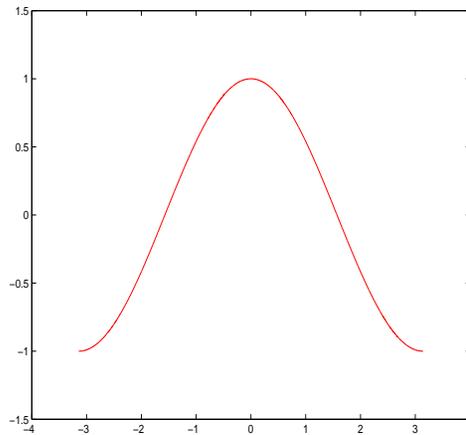


Fourier

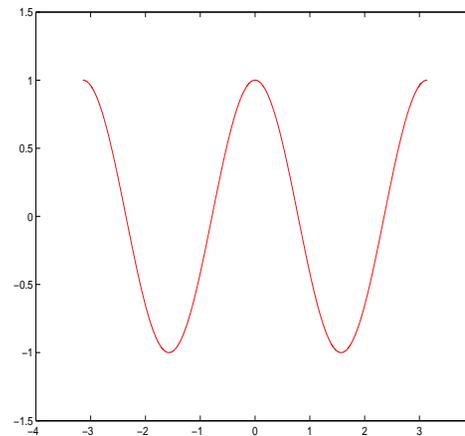
(Parte 1)

Ondas de frequências variadas

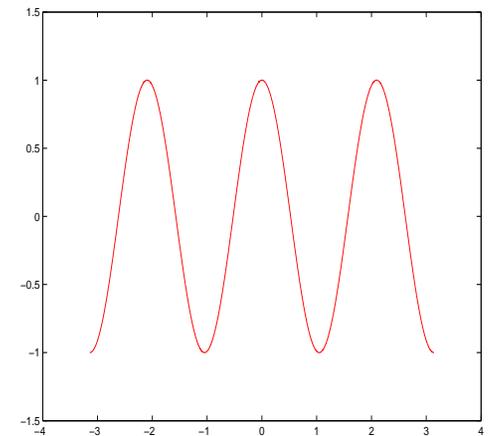
cos x



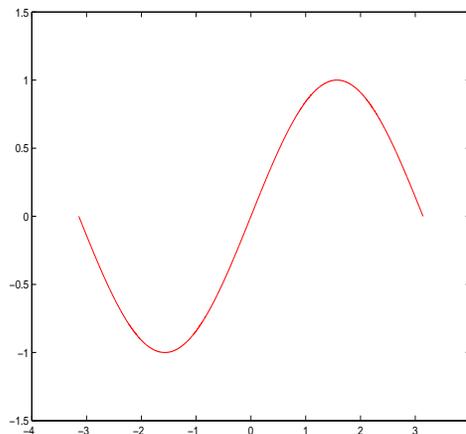
cos 2x



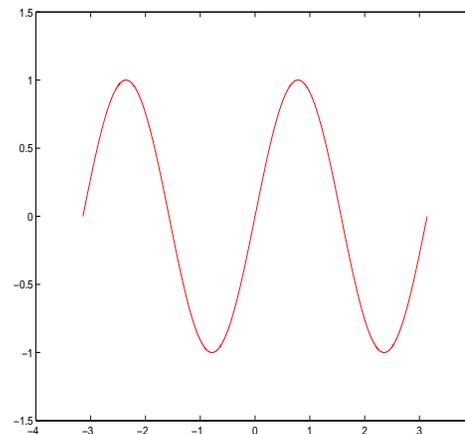
cos 3x



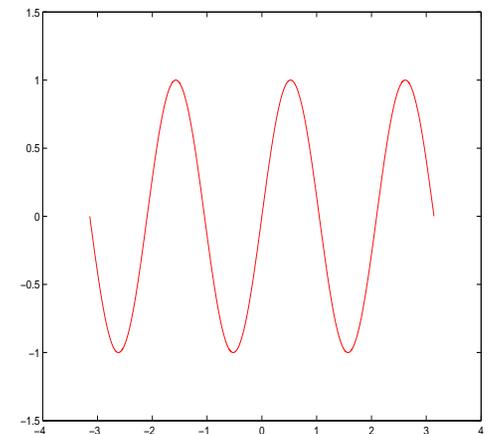
sen x



sen 2x



sen 3x



Ondas Sonoras

3D

Dó central $\rightarrow \xi = 263 \text{ Hz}$ (263 ciclos por segundo)

$$v_{\text{som}} = 340 \text{ m/s} \quad \lambda = \frac{v_{\text{som}}}{\xi} = 1.3 \text{ m}$$

Percepção do ouvido humano:

$$20 \text{ Hz} \lesssim \xi \lesssim 20000 \text{ Hz}$$

Ondas de Luz

Luz visível $\rightarrow \xi \approx 6 \times 10^{14}$ Hz

($\lambda = 0.5 \cdot 10^{-4}$ cm)

Cores \iff frequências variadas

Vermelho $\rightarrow 4.6 \cdot 10^{14}$ Hz

Violeta $\rightarrow 7.1 \cdot 10^{14}$ Hz

| | | | | | |
|------------|-----------|--------------|---------------|---------------|----------------|
| 10^{-10} | 10^{-8} | 10^{-6} | 10^{-3} | 100 | λ (cm) |
| raios gama | raios x | ultravioleta | infravermelho | onda de rádio | |
| 10^{20} | 10^{18} | 10^{16} | 10^{13} | 10^8 | ξ (Hz) |

Série de Fourier

$f(t)$ é um sinal 2π -periódico de energia finita

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}_k e^{ikt}$$

- Superposição de ondas puras e^{ikt}

período: 2π

frequência: k (em cada período ocorrem k ciclos)

amplitude: \hat{f}_k

- Ortogonalidade

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m, \\ 2\pi & \text{se } n = m, \end{cases}$$

- Coeficientes de Fourier

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

- Transformada de Fourier

$$f \rightarrow \hat{f} = (\hat{\mathbf{f}}_k)$$

Identidade de Parseval:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(t)]^2 dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2.$$

Energia total do sinal = a superposição das contribuições individuais de energia em cada nível de frequência

Base de Fourier:

$\{e^{ikt}, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow$ sistema ortogonal completo.

Integral de Fourier

$f(t)$ sinal não periódico de energia finita

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi,$$

- Transformada de Fourier: $f \rightarrow \hat{f}$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt$$

- Fórmula de Plancherel:

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{f}(\xi)]^2 d\xi.$$

O mundo discreto – DFT

f - sinal discreto N -periódico

- Transformada de Fourier discreta (DFT)

$$f \rightarrow \tilde{f},$$

- Coeficientes de Fourier discretos

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{\frac{-ink2\pi}{N}}$$

Forma matricial da DFT

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{1}{N} \overline{F_N} \mathbf{f}.$$

Matriz de Fourier de ordem N: F_N

N -ésima raiz da unidade: $w_N = e^{(i2\pi)/N}$

$\left(1, w_N^n, w_N^{2n}, \dots, w_N^{n(N-1)}\right) \rightarrow n$ -ésima linha de F_N

Ortogonalidade discreta da base de Fourier

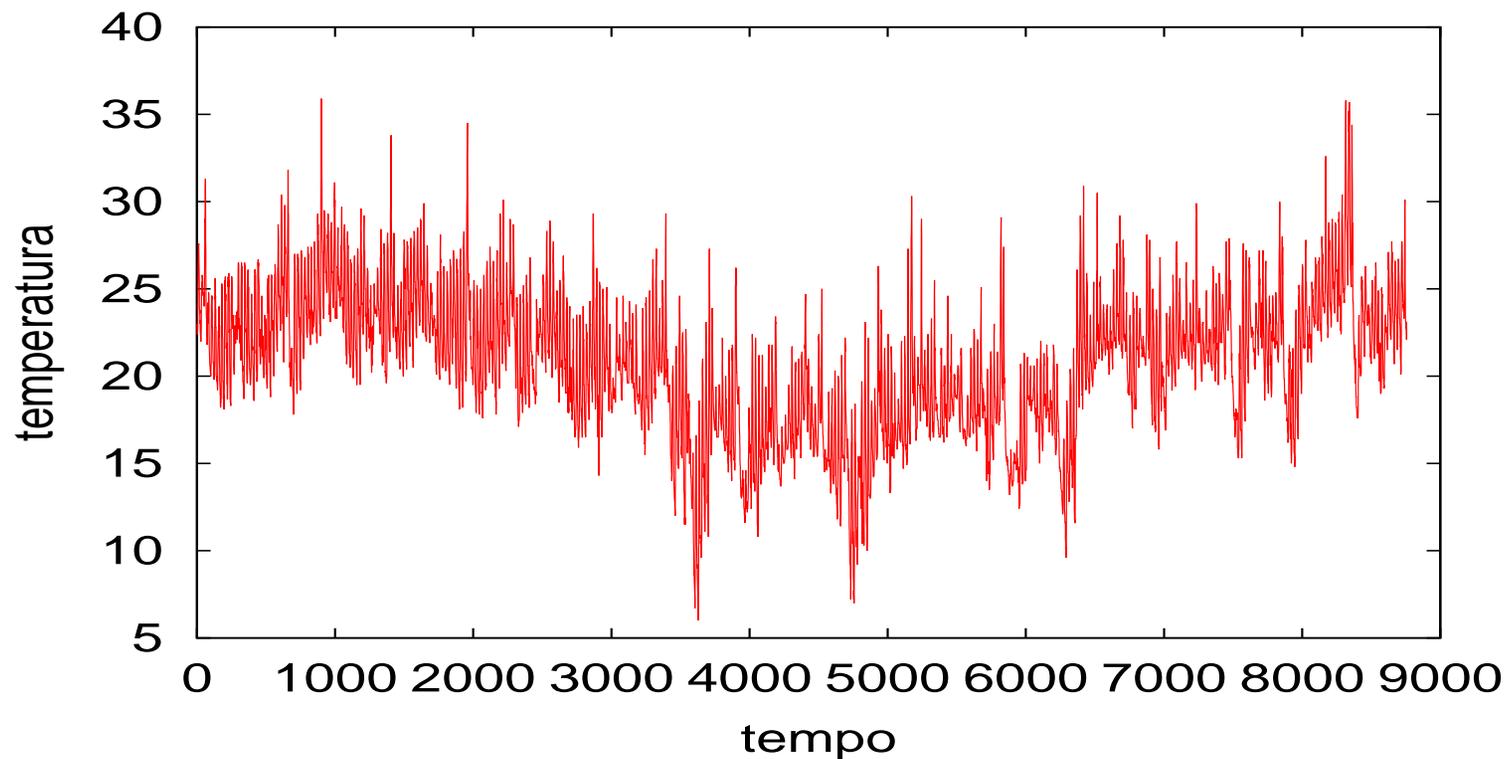
$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{\frac{ink2\pi}{N}} e^{-\frac{imk2\pi}{N}} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m, \\ N & \text{se } n = m, \end{cases}$$

$$F_N \overline{F_N} = N * I$$

IDFT

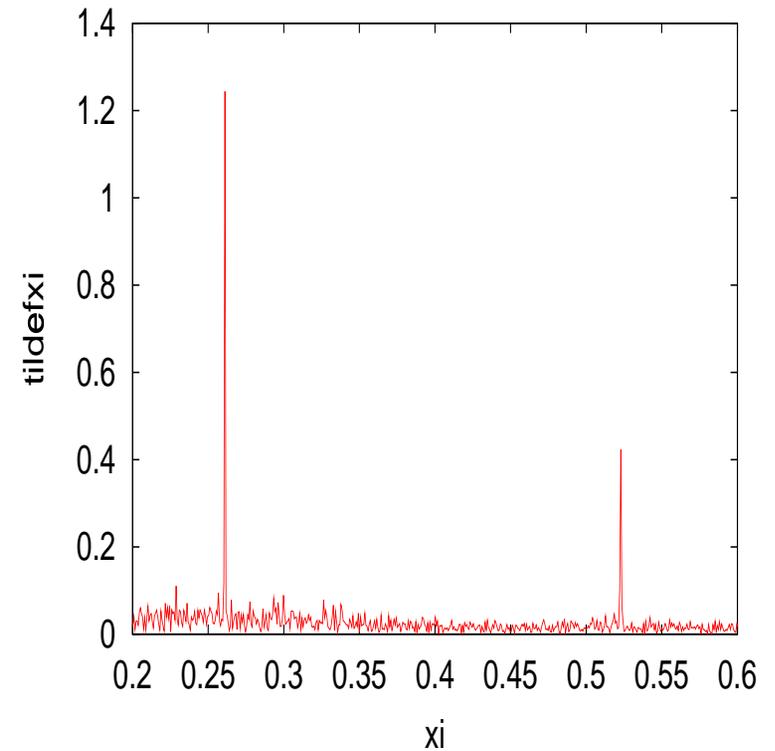
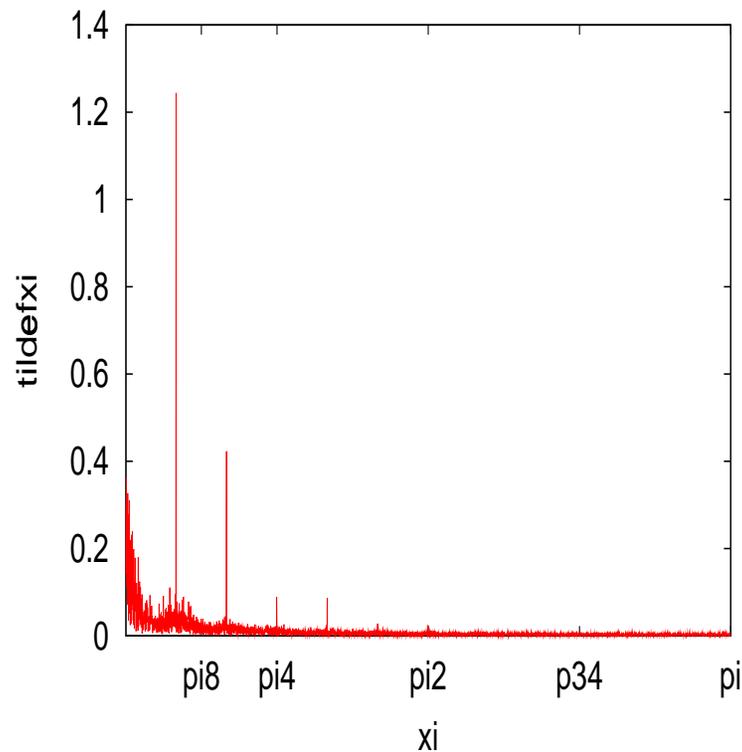
$$\mathbf{f} = F_N \tilde{\mathbf{f}},$$

Aplicação da DFT



Série temporal de temperatura do ar para a estação de Cananéia em 1979. Fonte dos dados: Lab. Met. do IO/USP. $N = 8760$

(b) Zoom in da DFT



$$\text{Frequência } \xi = \frac{2\pi k}{N}$$

Os picos em $\xi \approx 0,262$ e $\xi \approx 0,523$ correspondem ao ciclo diurno (24 horas) e semi-diurno (12 horas) da temperatura do ar

Produtos de Convolução

$$[f * g](t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(t - y)dy$$

$$[f * g](t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(t - y)dy \quad (\text{periódicos})$$

$$[\mathbf{f} * \mathbf{g}]_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m g_{n-m}$$

$$[\mathbf{f} * \mathbf{g}]_n = \sum_{m=0}^{N-1} f_m g_{n-m} \quad (\text{periódicos})$$

Teorema de Convolução

Sinais Contínuos: $w(t) = [f * g](t)$

não periódicos

$$\hat{w}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

2π -periódicos

$$\hat{w}_k = \hat{f}_k\hat{g}_k$$

Sinais Discretos: $\mathbf{w} = \mathbf{f} * \mathbf{h}$

não periódicos

$$W(\xi) = F(\xi)H(\xi)$$

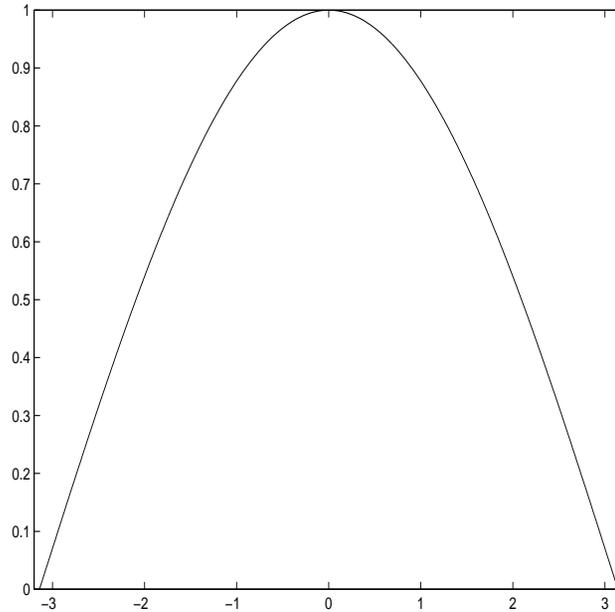
N -periódicos

$$\tilde{w}_k = N\tilde{f}_k\tilde{h}_k$$

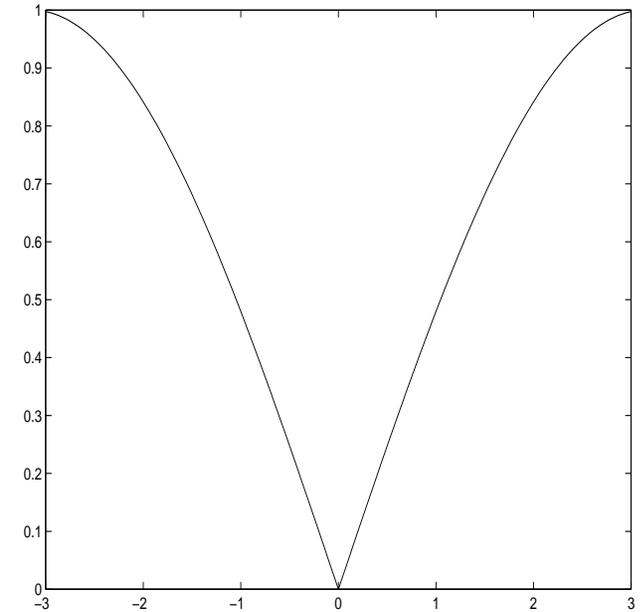
$$H(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-ik\xi}.$$

Filtros

(a) $|H(\xi)|$



(b) $|G(\xi)|$



Filtros passa-baixa $H(\xi)$ e passa-alta $G(\xi)$

Filtro passa baixa

$$H(\pi) = 0, H(\xi) \approx 1 \text{ para } \xi \approx 0.$$

Na convolução $w = h * f$:

- frequências baixas são preservadas,

$$|\tilde{w}_k| \approx \tilde{f}_k$$

- frequências altas são atenuadas

Exemplo:

$$H(\xi) = \frac{1}{2} [1 + e^{i\xi}] = e^{i\frac{\xi}{2}} \cos \frac{\xi}{2}.$$

- Coeficientes de h :

$$h_0 = h_{-1} = 1/2, \quad h_k = 0, \quad k > 0 \text{ e } k < -1$$

- w é a média entre o **sinal f** e **sua translação $S_{-1}f$** , isto é,

$$w_k = \frac{1}{2} f_k + \frac{1}{2} f_{k+1}.$$

Se o sinal for **suave**, de tal forma que f seja parecido com sua versão translada $S_{-1}f$, então o resultado da convolução não difere muito do sinal original.

frequências baixas são preservadas

No entanto, este não é o caso quando o sinal f for muito **oscilante**. Por exemplo, se o sinal for de tal forma que f_k seja igual a $-f_{k+1}$, então o resultado da convolução $w = f * h$ é nulo.

frequências altas são atenuadas

Filtro passa alta

$$G(0) = 0 \text{ e } G(\xi) \approx 1, \text{ para } \xi \approx \pi$$

Na convolução $w = g * f$:

- frequências altas são preservadas
- frequências baixas são atenuadas

Exemplo 1:

$$G(\xi) = -ie^{i\frac{\xi}{2}} \sin \frac{\xi}{2},$$

- Coeficientes de g :

$$g_0 = -g_{-1} = \frac{1}{2}, \quad g_k = 0, \quad k > 0 \text{ e } k < -1$$

-

$$w_k = \frac{1}{2}f_k - \frac{1}{2}f_{k+1} \Rightarrow 2\mathbf{w} = \mathbf{f} - S_{-1}\mathbf{f}.$$

Exemplo 2:

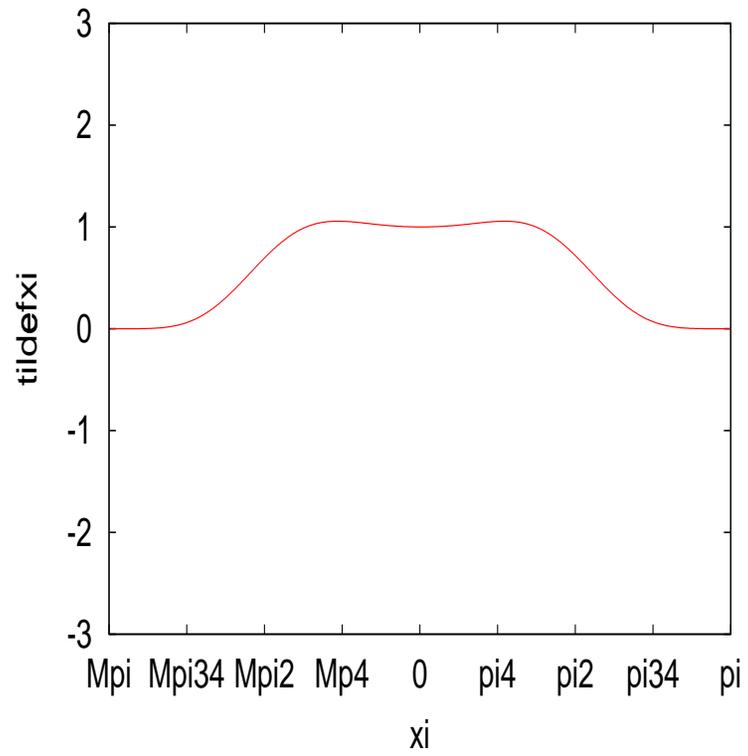
Filtro passa-baixa:

$$\begin{aligned}h(k) &= 0, \quad k \leq -5, \\h(-4) &= 3/256, \\h(-3) &= -3/256, \\h(-2) &= -22/256, \\h(-1) &= 22/256, \\h(0) &= 128/256, \\h(k) &= h(1 - k), \quad k > 0,\end{aligned}$$

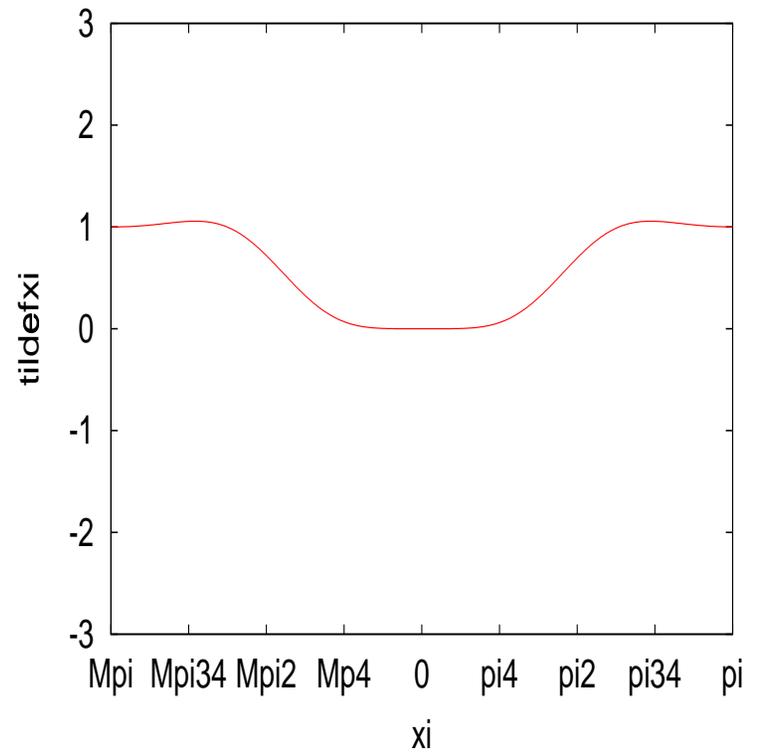
Filtro passa-alta:

$$|G(\xi)| = |H(\xi + \pi)|$$

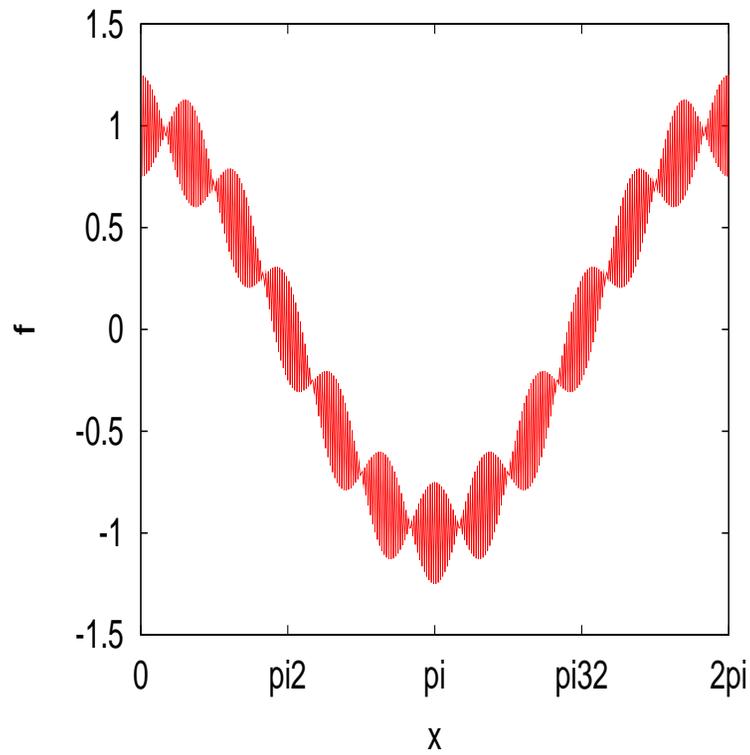
$|H(\xi)|$



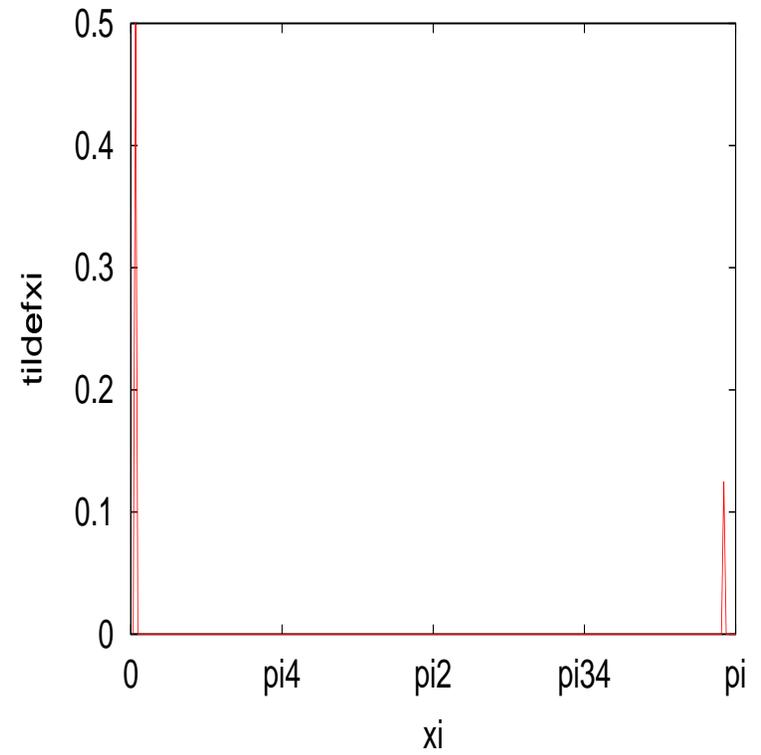
(b) $|G(\xi)|$



Sinal



DFT $N = 512$



$$f(t) = \cos t + \frac{1}{4} \cos 250t.$$

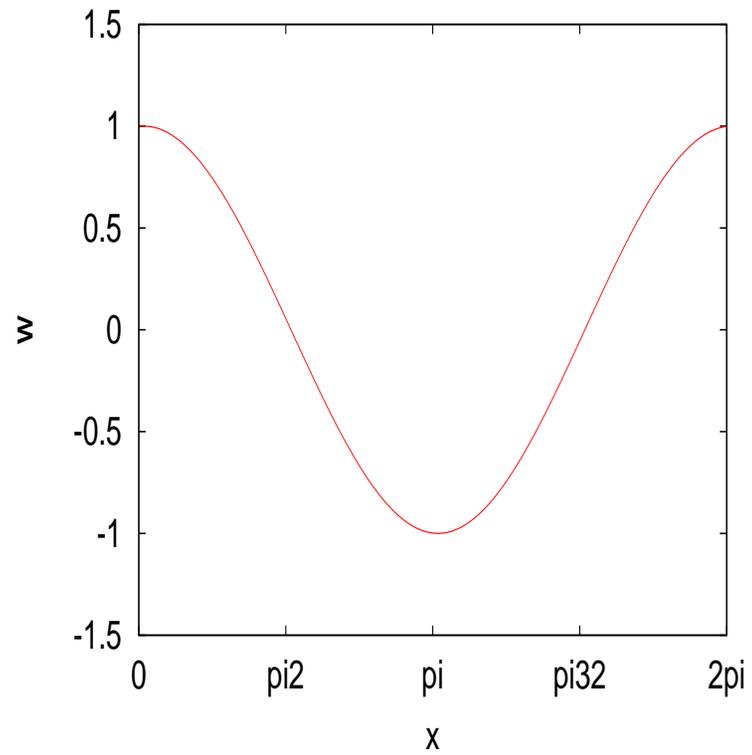
(a) **Convolução $w = f * h$:**

Em w permanece apenas a componente de frequência baixa, uma vez que o filtro H anula a componente de alta frequência.

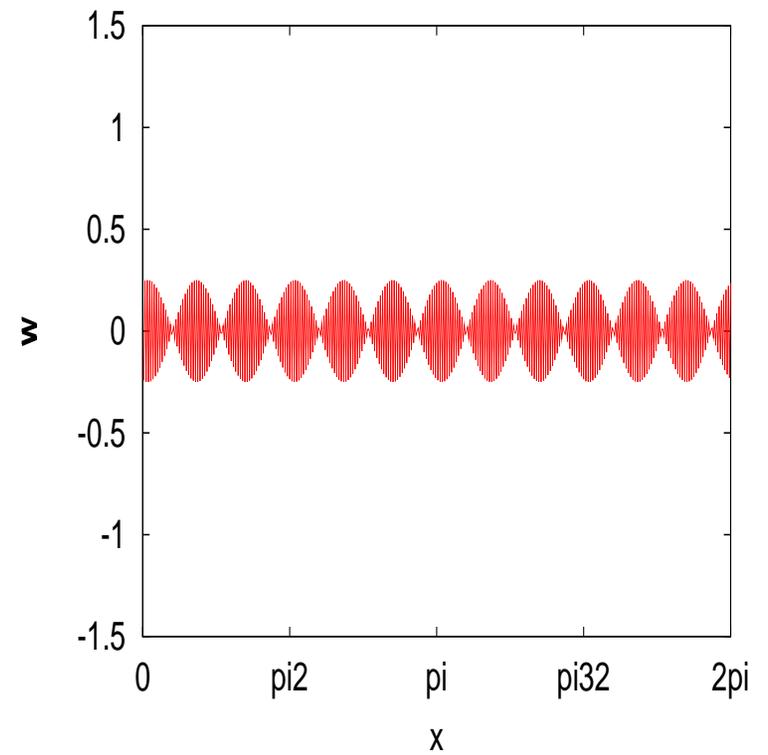
(b) **Convolução $w = f * g$:**

w só contém a componente de alta frequência, tendo em vista que o filtro $G(\xi)$ cancela as frequências baixas de f .

(a) $w = f * h$



(b) $w = f * g$



FFT - Cooley e Tuckey (1965)

- DFT: Esforço computacional $\mathcal{O}(N^2)$
- FFT: Esforço computacional $\mathcal{O}(N \log_2(N))$

Algoritmo baseado em uma fatoração da matriz de Fourier em termos de matrizes esparsas

Exemplo

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

Fatoração de F_4

$$F_4 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & i \\ & & -1 & \\ & & & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

DCT

- $\mathbf{f} = (f_k)$ - sinal discreto definido para $0 \leq k < N$
- O sinal é estendido por simetria
- A expansão de Fourier do sinal estendido pode ser expressa por base de cossenos

DFT em 2D

- A análise de Fourier se estende a 2D de forma direta

$$\hat{f}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(x\xi_1 + y\xi_2)} dx dy$$

JPEG e Codificação com DCT

- Imagens de N^2 pixels são divididas em $N^2/64$ blocos de 8×8 pixels. Cada bloco é transformado com FDCT-2D (fast discrete cosine transform)
- Usualmente, JPEG é usado com taxas médias $\bar{R} \in [0.5 - 1]$ bits/pixel; De 0.75 – 1 bits/pixel, a qualidade é excelente;
- Com taxas de 0.25 – 0.5 bits/pixel, a qualidade é moderada. Abaixo deste nível, efeitos visuais quadriculados aparecem e torna-se impraticável.

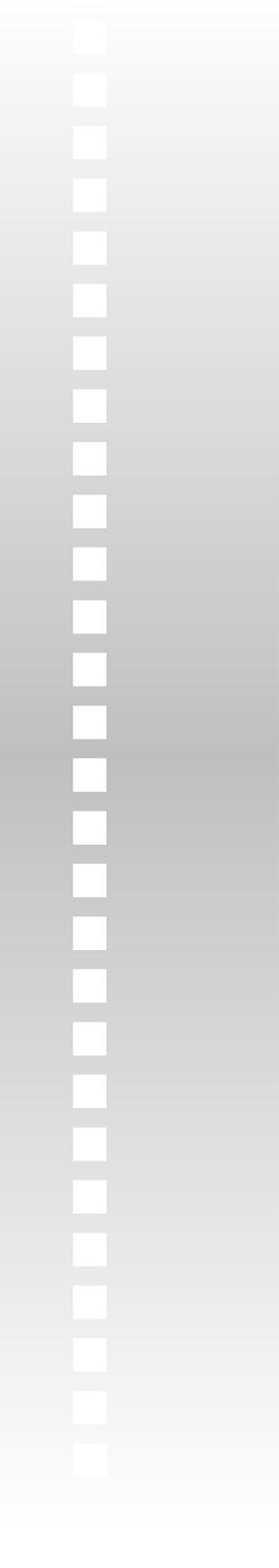
0.5 bit/pixel



0.2 bit/pixel



Figure 11.14: Image compression with JPEG.

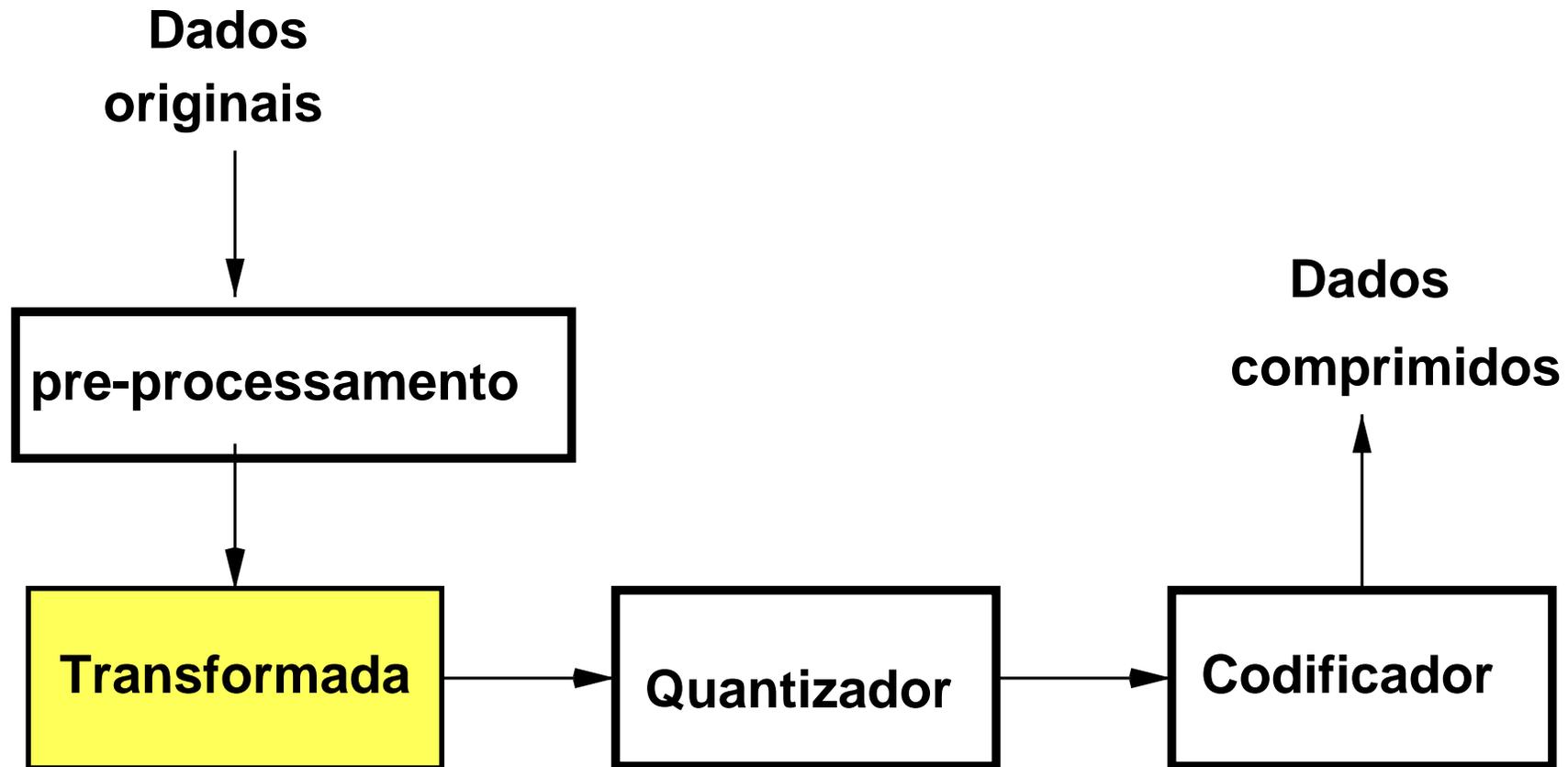


Wavelets

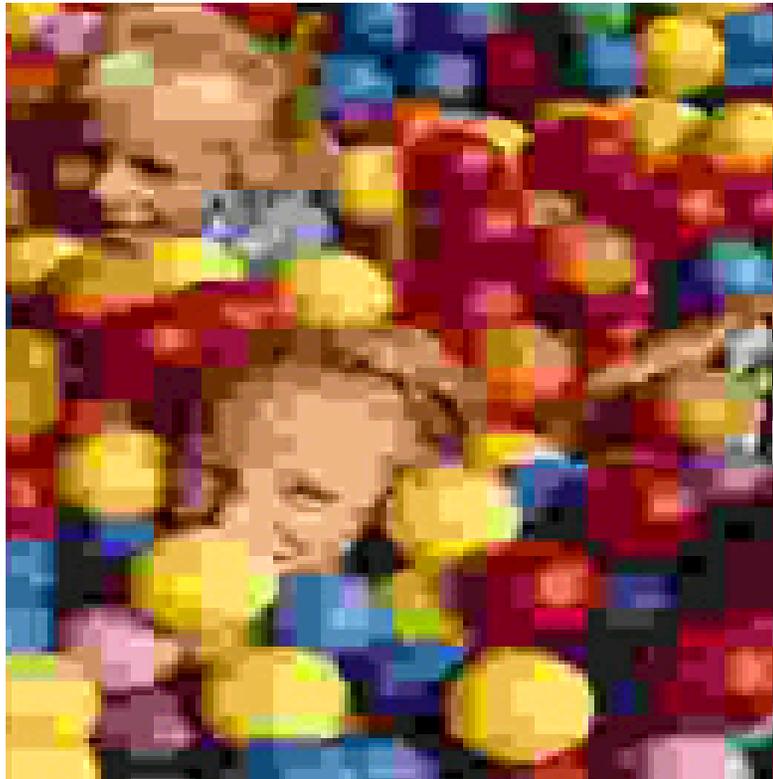
(Parte 2)

Codificação por Transformadas

Etapas Básicas



JPEG (DCT)



JPEG2000(DWT)



6.1KB (Taxa de compressão = 115 : 1)

JPEG (Joint Photographic Experts Group)

Série de Wavelets

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^j \psi_k^j(t),$$

Funções básicas: **wavelets**

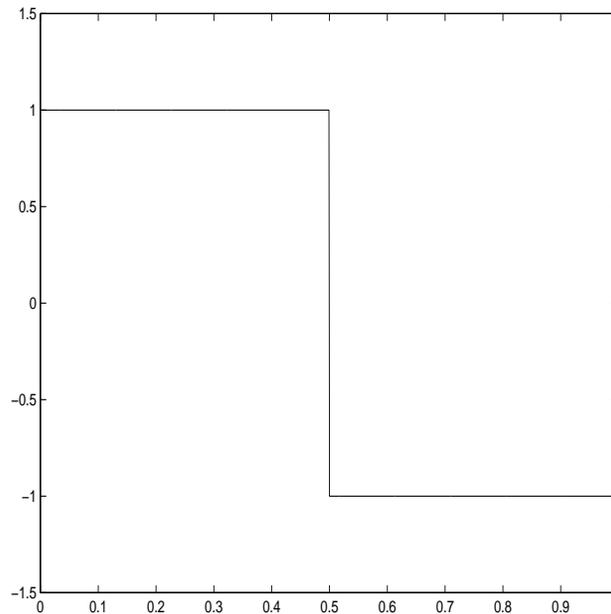
$$\psi_k^j(t) = \psi(2^j t - k)$$

Existem várias famílias, dependendo da escolha da wavelet mãe $\psi(t)$.

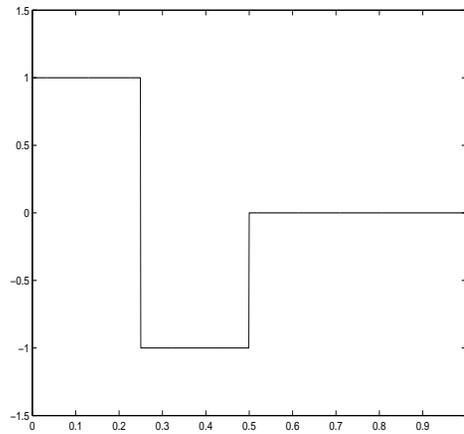
d_k^j \longrightarrow **coeficientes wavelets.**

Exemplo: Wavelet de Haar

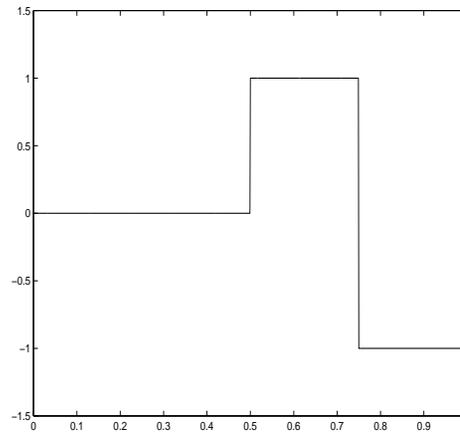
$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



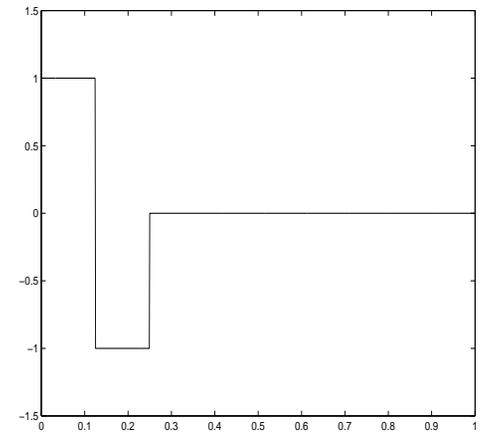
$$\psi(2t)$$



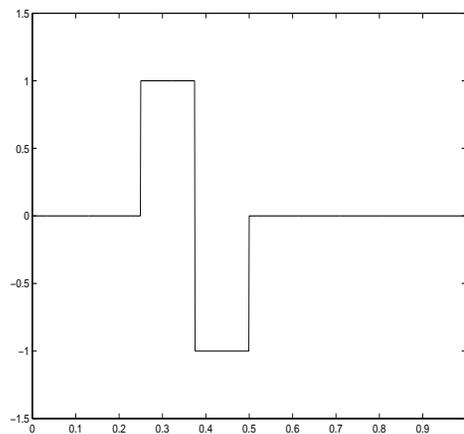
$$\psi(2t - 1)$$



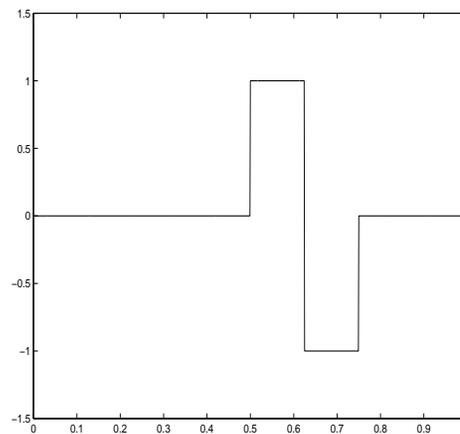
$$\psi(4t)$$



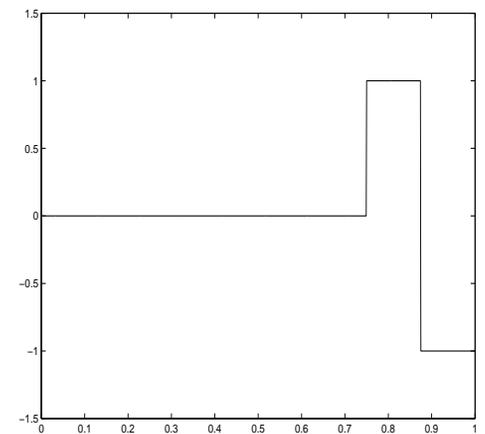
$$\psi(4t - 1)$$



$$\psi(4t - 2)$$



$$\psi(4t - 3)$$



- Sistema ortogonal

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^j t - k) \psi(2^l t - n) dt = \begin{cases} 0 & \text{se } j \neq l \text{ ou } k \neq n \\ 2^{-j} & \text{se } j = l \text{ e } k = n, \end{cases}$$

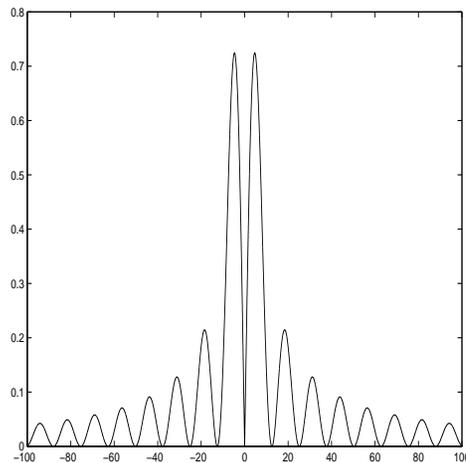
- Coeficientes wavelet

$$d_k^j = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(2^j t - k) dt.$$

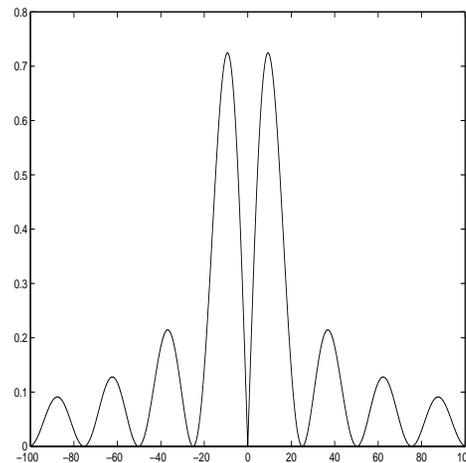
Transformada de Fourier das Wavelets de Haar

$$\hat{\psi}(\xi) = \frac{1}{i\xi} [1 - e^{-i\frac{\xi}{2}}]^2.$$

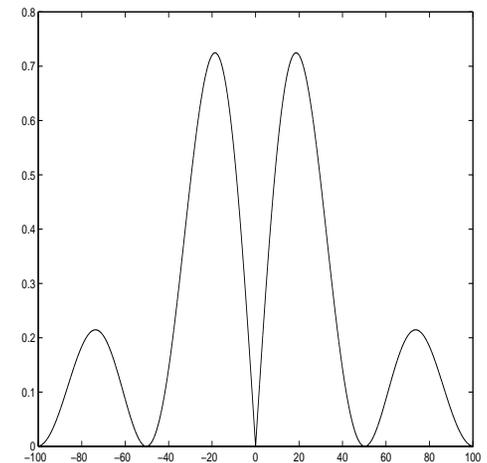
$|\hat{\psi}(\xi)|$



$|\hat{\psi}(2^{-1}\xi)|$



$|\hat{\psi}(2^{-2}\xi)|$



Transformada wavelet

$$f \rightarrow f^w = (d_k^j)$$

- Identidade de Parserval

$$\int [f(t)]^2 dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-j} |d_k^j|^2.$$

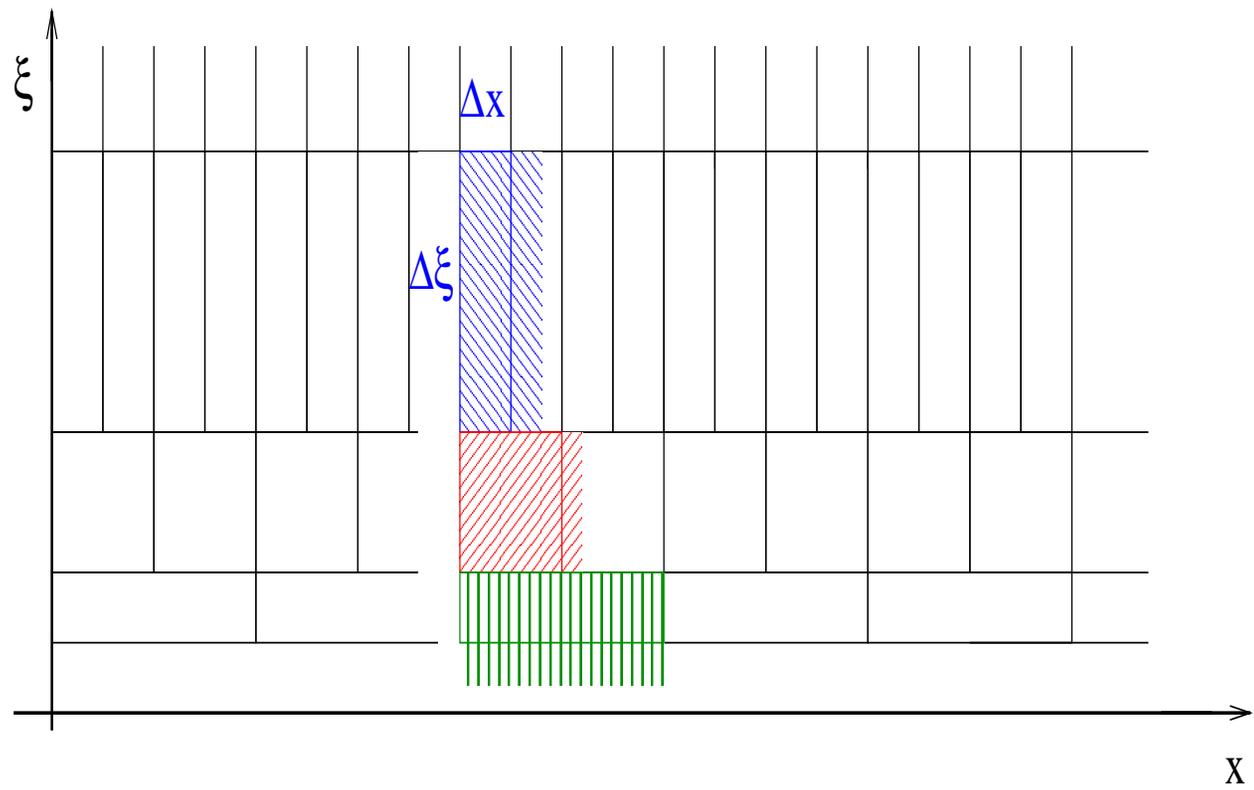
Wavelets: Características

- *Localização temporal*
- *Localização frequencial*

d_k^j medida do conteúdo **frequencial** de f associado às frequências ξ que ocorrem no **suporte de $\psi_k^j(t)$** .

Resoluções inversamente proporcionais

$$\Delta^j t \times \Delta^j \xi = \text{constante}$$



Plano $t \times \xi$

DWT e IDWT

$$\{\bar{\mathbf{f}}^{j+1}\} \begin{array}{c} \xrightarrow{DWT} \\ \xleftarrow{IDWT} \end{array} \{\bar{\mathbf{f}}^{j_0}, \mathbf{d}^{j_0}, \dots, \mathbf{d}^j\}$$

\bar{f}^ℓ — Valores discretos do sinal na **escala** $2^{-\ell}$

$$\bar{f}_n^\ell = 2^\ell \int_{n2^{-\ell}}^{(n+1)2^{-\ell}} f(t) dt$$

(médias nos intervalos $[n2^{-\ell}, (n+1)2^{-\ell}]$).

d^ℓ — **Detalhes** entre os níveis ℓ e $\ell + 1$

Algoritmos

Análise ou decomposição: $\bar{f}^{j+1} \rightarrow (\bar{f}^j, d^j)$

$$\bar{f}_k^j = \frac{1}{2} \left[\bar{f}_{2k}^{j+1} + \bar{f}_{2k+1}^{j+1} \right]$$

$$d_k^j = \frac{1}{2} \left[\bar{f}_{2k}^{j+1} - \bar{f}_{2k+1}^{j+1} \right].$$

Síntese ou reconstrução: $(\bar{f}^j, d^j) \rightarrow \bar{f}^{j+1}$

$$\bar{f}_{2k}^{j+1} = \left[\bar{f}_k^j + d_k^j \right]$$

$$\bar{f}_{2k+1}^{j+1} = \left[\bar{f}_k^j - d_k^j \right].$$

Forma de convolução

Análise

$$d_k^j = [\bar{\mathbf{f}}^{j+1} * \mathbf{g}^*]_{2k} \quad \bar{f}_k^j = [\bar{\mathbf{f}}^{j+1} * \mathbf{h}^*]_{2k},$$

Síntese

$$\bar{f}_k^{j+1} = 2 \left\{ \sum_n \bar{f}_n^j h_{k-2n} + \sum_n \bar{f}_n^j g_{k-2n} \right\},$$

Filtros

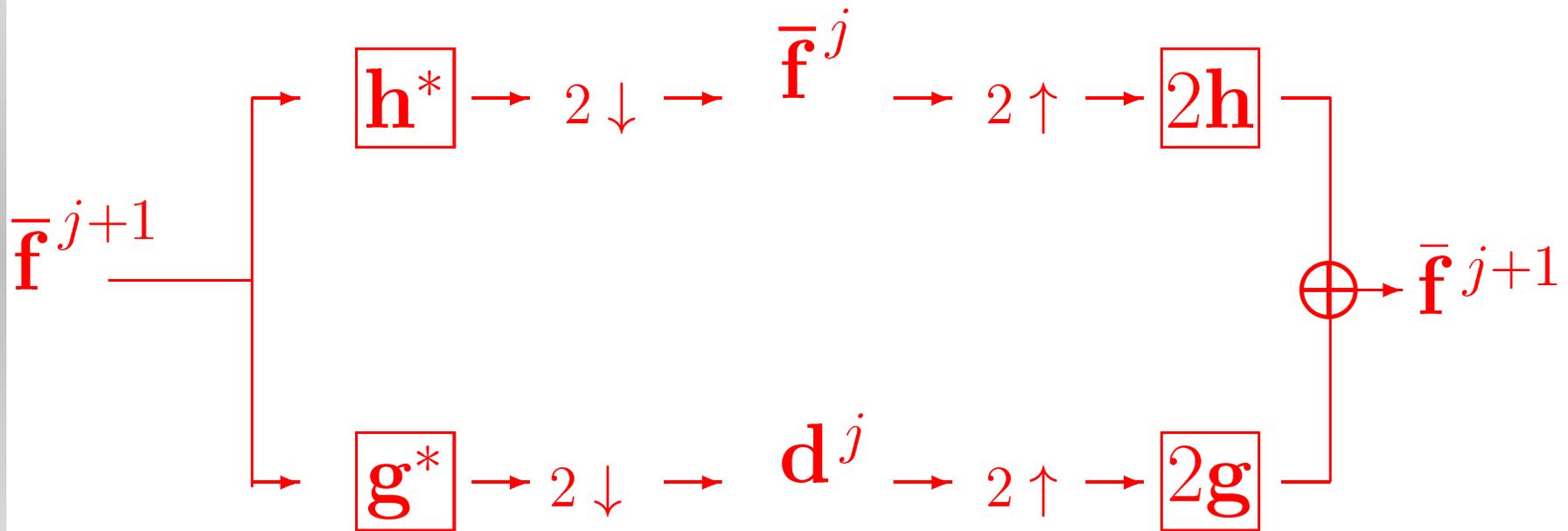
Os filtros de análise e de síntese são conjugados

$$H^*(\xi) = \overline{H(\xi)} \quad \text{e} \quad G^*(\xi) = \overline{G(\xi)}.$$

$$h_k = h_{-k}^*, \quad g_k = g_{-k}^*.$$

$$g^*(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ -\frac{1}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{demais casos.} \end{cases} \quad h^*(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 0 \\ \frac{1}{2} & k = -1 \\ 0 & \text{demais casos.} \end{cases}$$

Banco de Filtros



$2\downarrow$ downsampling

$2\uparrow$ upsampling

Wavelets Ortogonais de Daubechies

Principais ingredientes:

(a) Filtro passa baixa $H(\xi)$

Condição de ortogonalidade

$$|H(\xi)|^2 + |H(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad \forall \xi$$

(b) Filtro passa alta $G(\xi)$

$$G(\xi) = e^{-i\xi} \overline{H(\xi + \pi)}.$$

Em termos de seus coeficientes: $g_n = (-1)^n h_{1-n}$

Filtros ortogonais de Daubechies

$$|H_K(\xi)|^2 = P_{2K}(\xi)$$

Filtros de interpolação: $P_M(\xi)$, $M = 2K$

$$P_M(\xi) = \left(\cos \frac{\xi}{2}\right)^M \sum_{m=0}^{K-1} \binom{K-1+m}{m} (\sin \xi/2)^{2m}$$

(associados a interpolação polinomial de Lagrange de grau $M-1$)

Coeficientes dos Filtros

| | $K = 2$ | $K = 3$ | $K = 4$ |
|---|---------------------|---------------------|----------------------|
| k | $h(k)$ | $h(k)$ | $h(k)$ |
| 0 | 0.341506350946110 | 0.235233603892082 | 0.162901714025649 |
| 1 | 0.591506350946109 | 0.570558457915722 | 0.505472857545914 |
| 2 | 0.158493649053890 | 0.325182500263116 | 0.446100069123380 |
| 3 | -0.0915063509461096 | -0.0954672077841637 | -0.0197875131178224 |
| 4 | | -0.0604161041551981 | -0.132253583684520 |
| 5 | | 0.0249073356548795 | 0.0218081502370886 |
| 6 | | | 0.0232518005354909 |
| 7 | | | -0.00749349466518071 |

DWT e IDWT

$$\{\bar{\mathbf{f}}^{j+1}\} \begin{array}{c} \xrightarrow{DWT} \\ \xleftarrow{IDWT} \end{array} \{\bar{\mathbf{f}}^{j_0}, \mathbf{d}^{j_0}, \dots, \mathbf{d}^j\}$$

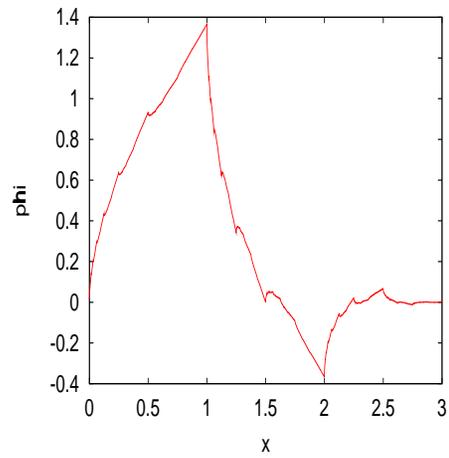
$$\bar{f}_n^l = 2^l \int_{\mathbf{R}} f(t) \phi(2^l t - n) dt$$

$\phi(t)$ → função de escalonamento

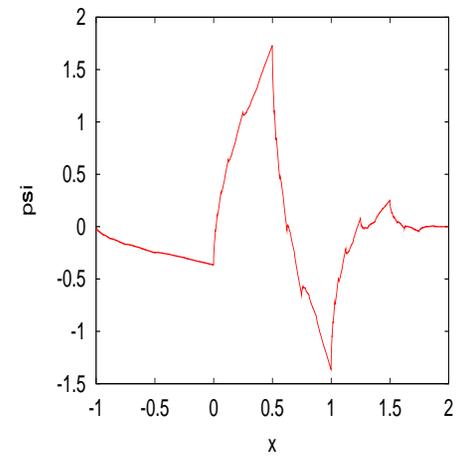
$$d_n^l = 2^l \int_{\mathbf{R}} f(t) \psi(2^l t - n) dt$$

$\psi(t)$ → função wavelet mãe

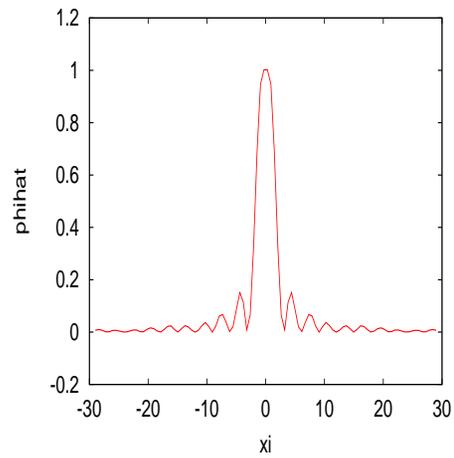
$$\phi_2(t)$$



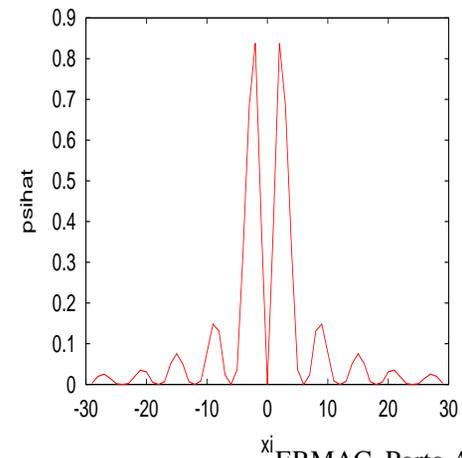
$$\psi_2(t)$$



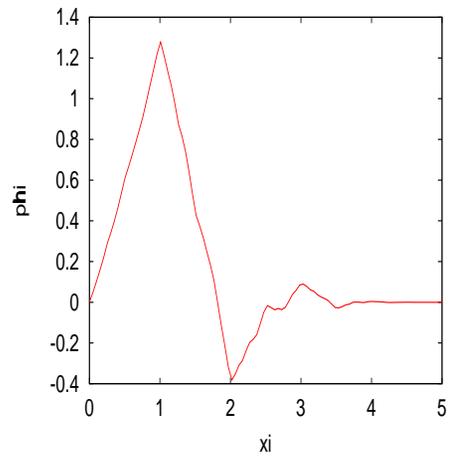
$$|\hat{\phi}_2(\xi)|$$



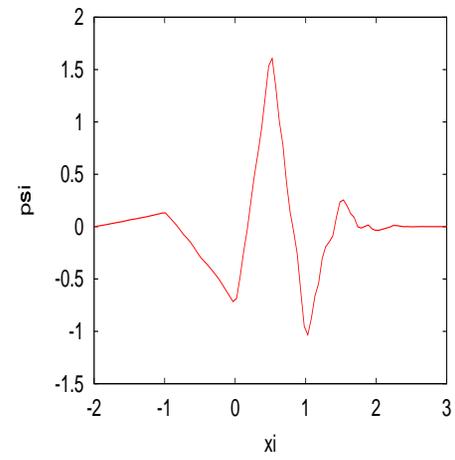
$$|\hat{\psi}_2(\xi)|$$



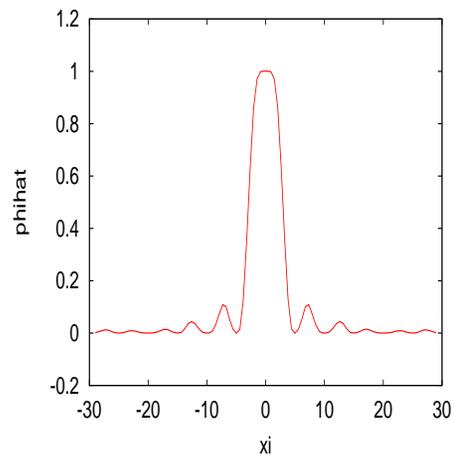
$$\phi_3(t)$$



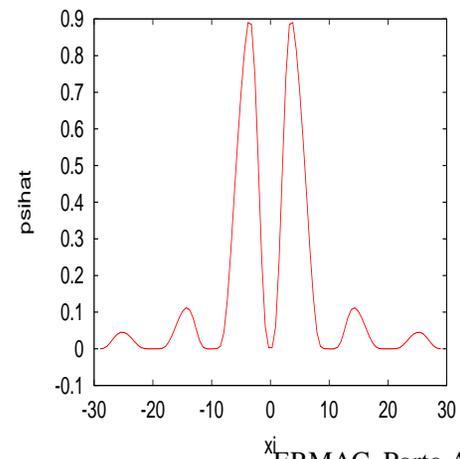
$$\psi_3(t)$$



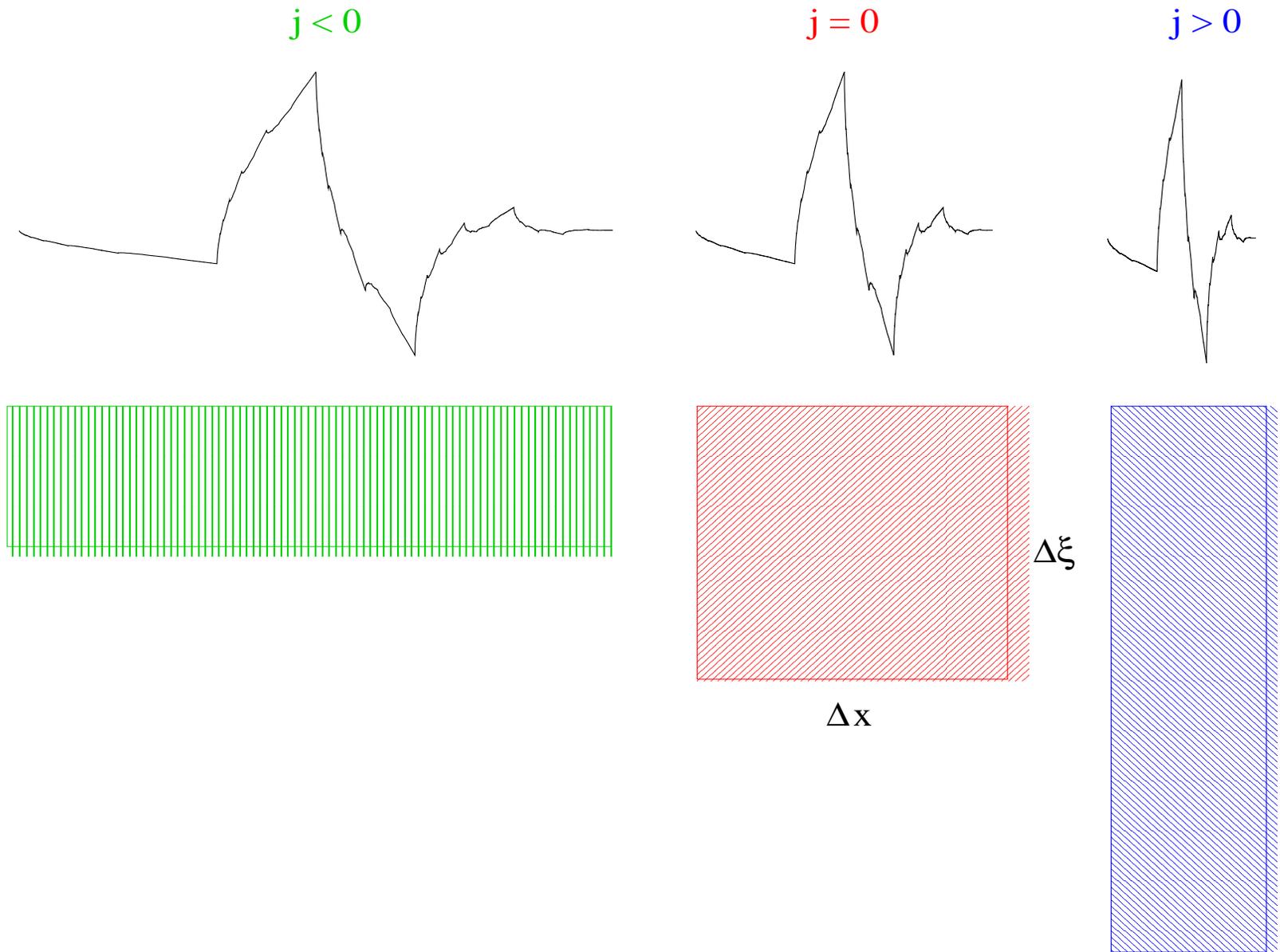
$$|\hat{\phi}_3(\xi)|$$



$$|\hat{\psi}_3(\xi)|$$



Localização Tempo-frequência



Propriedades

Relações de escala

$$\phi(t) = 2 \sum_k h_k \phi(2t - k),$$

$$\psi(t) = 2 \sum_k g_k \phi(2t - k)$$

Relações de ortogonalidade

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t - n) \phi(t - m) = \delta_{n-m},$$

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(t - n) \psi(t - m) = \delta_{n-m},$$

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(t - n) \psi(t - m) = 0,$$

Suavidade e Suporte: A suavidade e o suporte das wavelets de Daubechies aumentam com o parâmetro K .

Cancelamento de Polinômios: As wavelets de Daubechies possuem K momentos nulos, i.e, cancelam os polinômios de grau $\leq K - 1$.

(K é ordem com que o filtro passa baixa $H(\xi)$ se anula em π , que é igual a ordem com que $G(\xi) = e^{-i\xi} \overline{H(\xi + \pi)}$ se anula em zero.

O número de momentos nulos é também igual à ordem com que a transformada de Fourier $\hat{\psi}(\xi)$ se anula na origem.)

Caracterização de Regularidade local:

$\mathcal{O}(|d_k^j|)$ está associada ao grau de **suavidade** de f no **suporte** de ψ_k^j , e ao número de **momentos nulos** de ψ .

(Seja $p + 1$ o número de momentos nulos de ψ . Se f for uma função com derivada $f^{(s)}$ contínua no suporte de ψ_k^j , $0 \leq s \leq p + 1$, então o coeficiente wavelet $d_k^j = \langle f, \psi_k^j \rangle$ satisfaz a estimativa

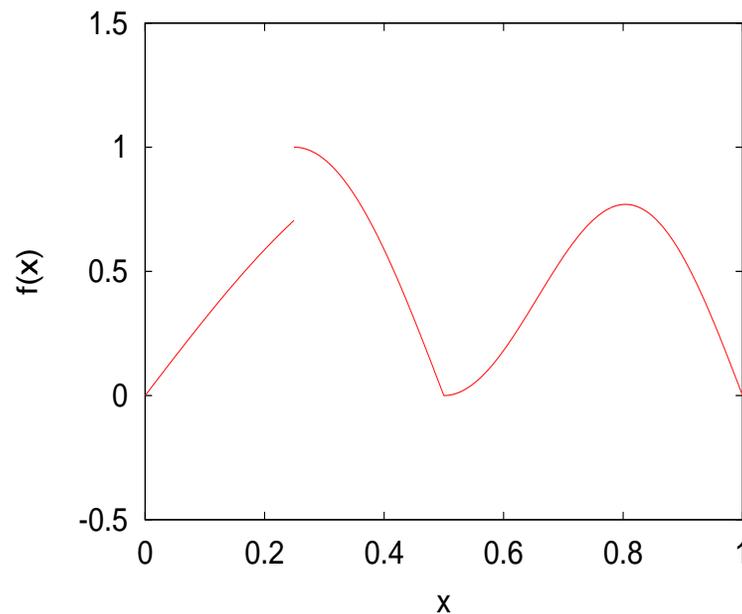
$$|d_k^j| \leq C 2^{-j(s+1/2)} \|f^{(s)}\|_\infty$$

C – constante que depende de ψ e $\|f^{(s)}\|_\infty$ é a norma do máximo de $f^{(s)}$ no suporte de ψ_k^j .)

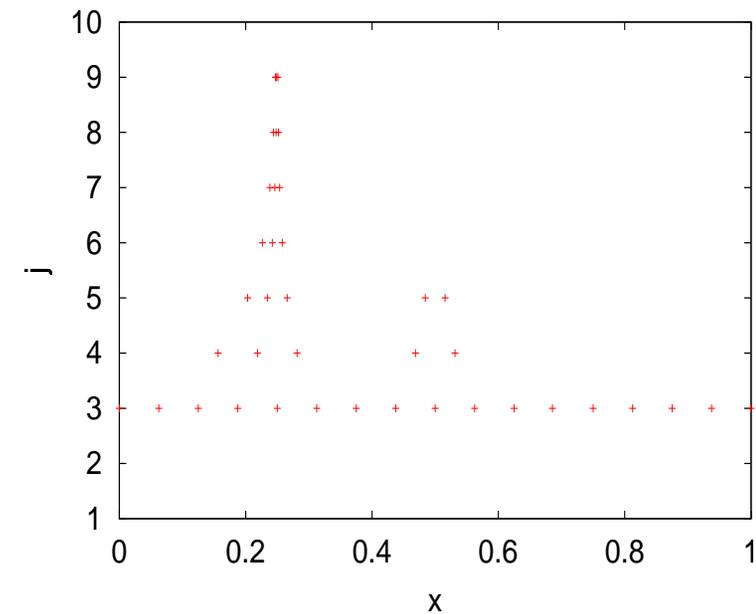
Exemplo

- d_k^j são **pequenos** em regiões de **suavidade**
- d_k^j são **grandes** em regiões com **singularidade**

Função



Posição dos $|d_k^j| > 10^{-2}$



Localização dos coeficientes wavelets significativos.

Wavelets Biortogonais

Filtros passa baixa $H(\xi)$ e $H^*(\xi)$

Condição de Biortogonalidade

$$H(\xi)\overline{H^*(\xi)} + H(\xi + \pi)\overline{H^*(\xi + \pi)} = 1 \quad \forall \xi$$

- As funções de escalonamento $\phi^*(x - k)$ são ortogonais às wavelets $\psi(x - k)$; As funções de escalonamento $\phi(x - k)$ são ortogonais às wavelets $\psi^*(x - k)$;
- É possível ter simetria ;
- Nos contornos, pode-se usar extensão simétrica;

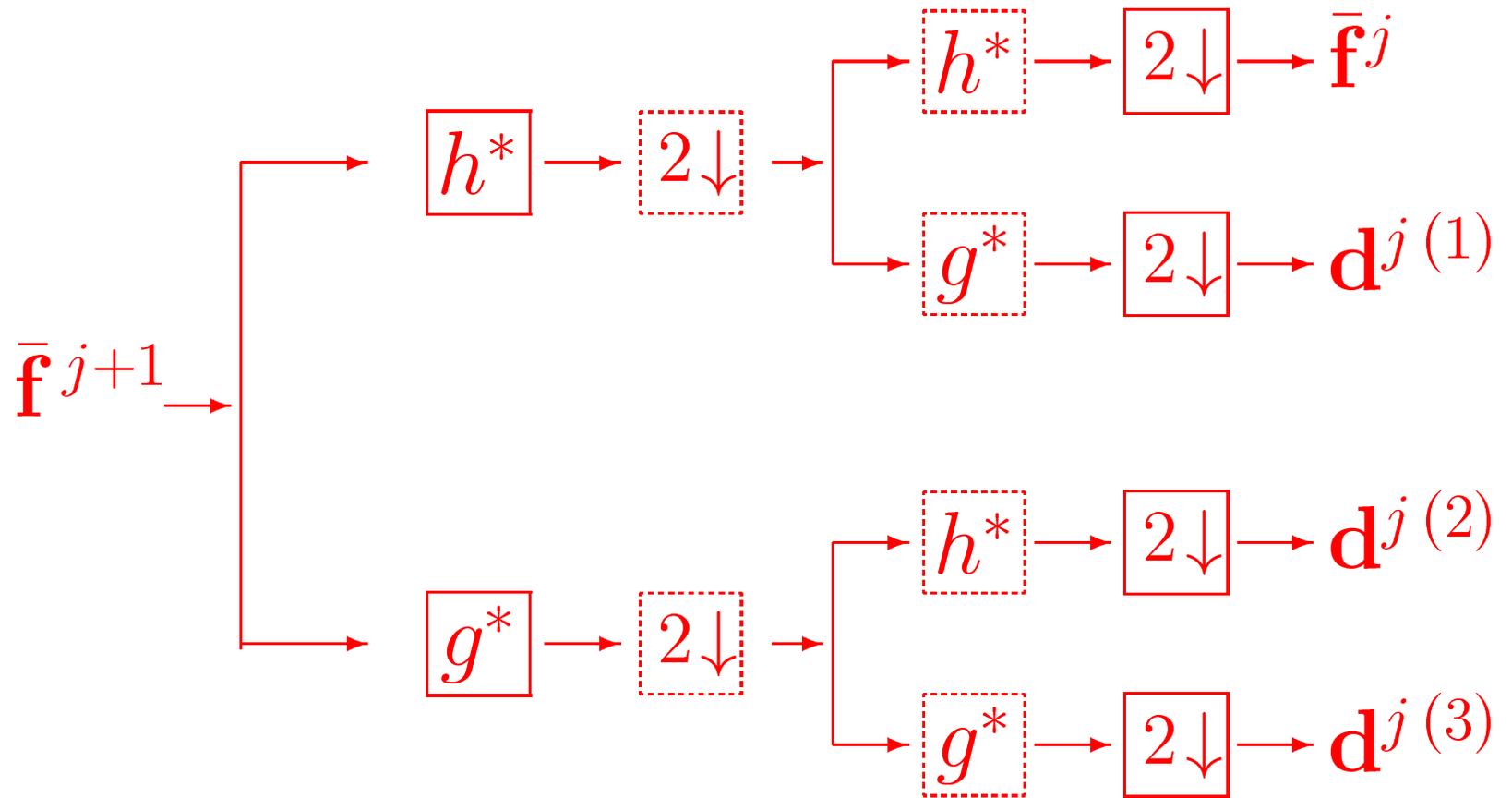
Processamento de Imagens

- Imagem \rightarrow matriz 2D

$$\bar{\mathbf{f}}^{j+1} = (f_{k,\ell}^{j+1})$$

- Os **algoritmos** de análise e síntese da **WT 2D** possuem uma estrutura de bancos de filtros **similar** ao caso **1D**.
- As **convoluções**, *downsampling* e *upsampling* são efetuadas nas **linhas** e **colunas** dessa matriz.
- Em **2D** existem **3** tipos de **coeficientes wavelets**.

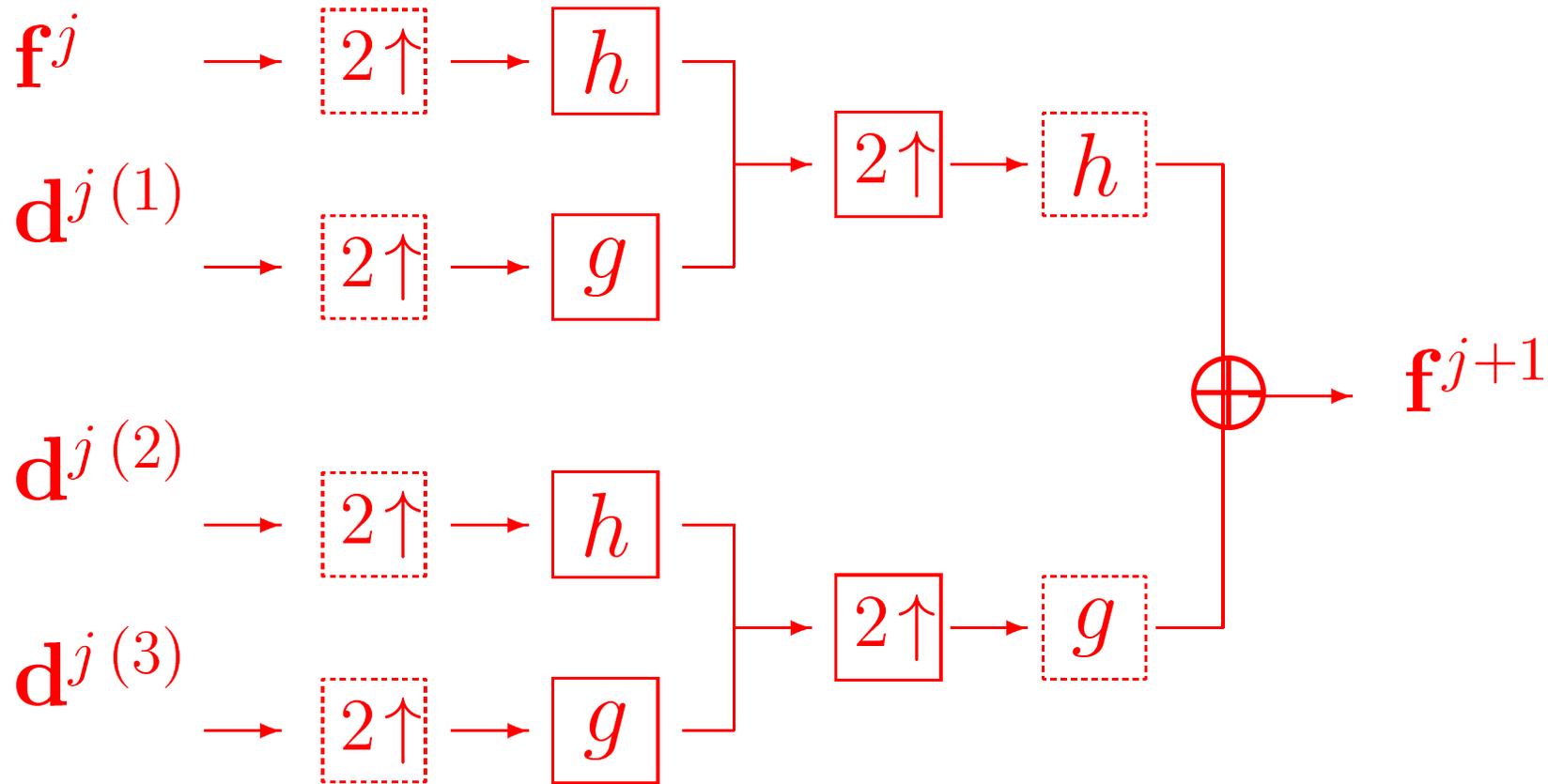
DWT 2D



$2\downarrow$ *downsampling* de colunas

$2\downarrow$ *downsampling* de linhas

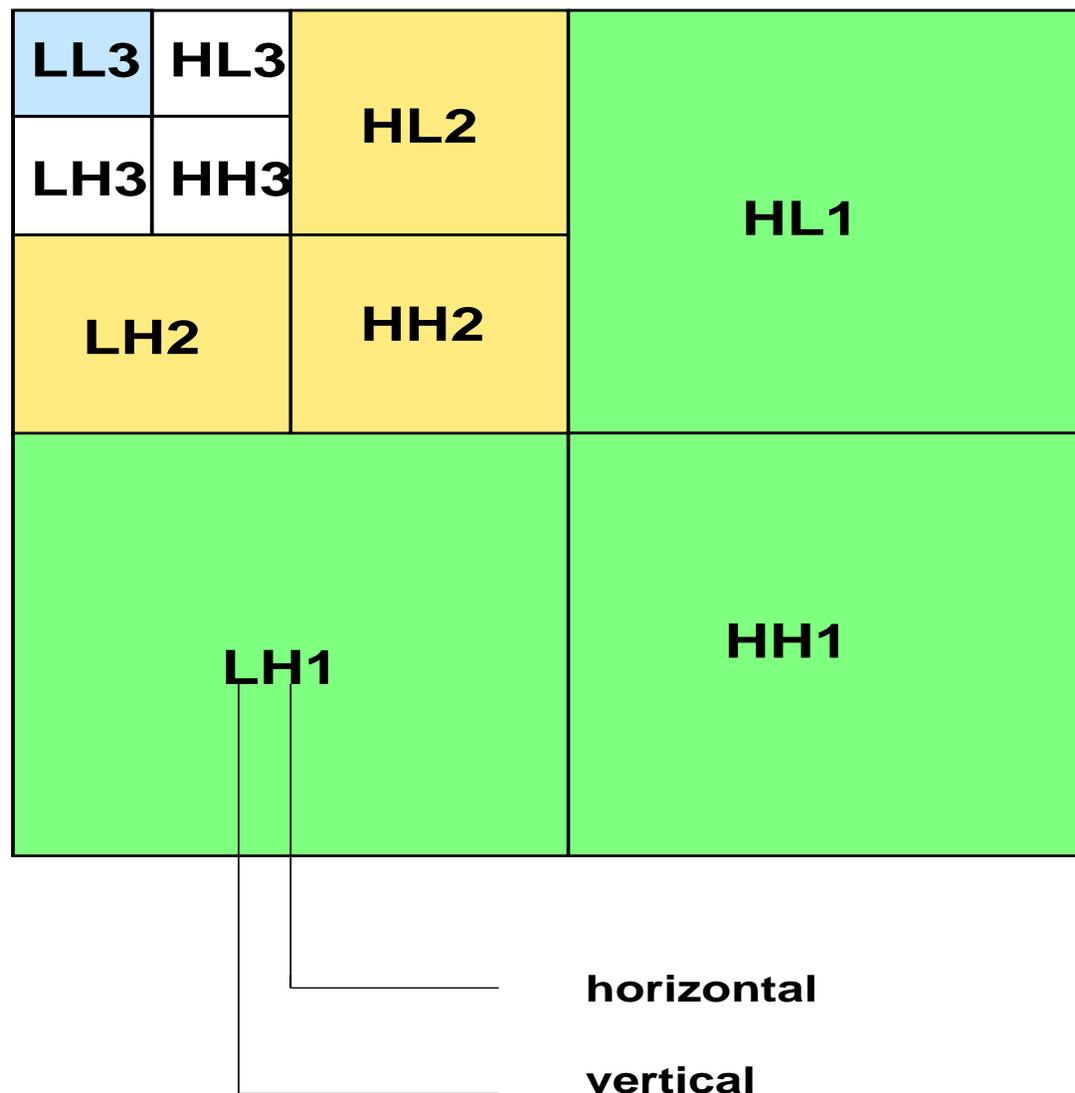
IDWT 2D



$2\uparrow$ upsampling de colunas

$2\uparrow$ upsampling de linhas

2D-DWT



Lena



GoldHill



Boats



Mandrill

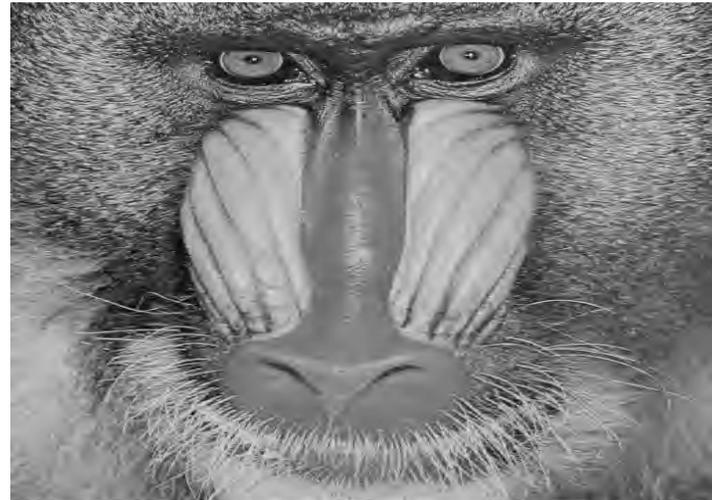


Figure 11.6: These images of $N^2 = 512^2$ pixels are coded with $\bar{R} = 0.5$ bit/pixel, by a wavelet transform coding.

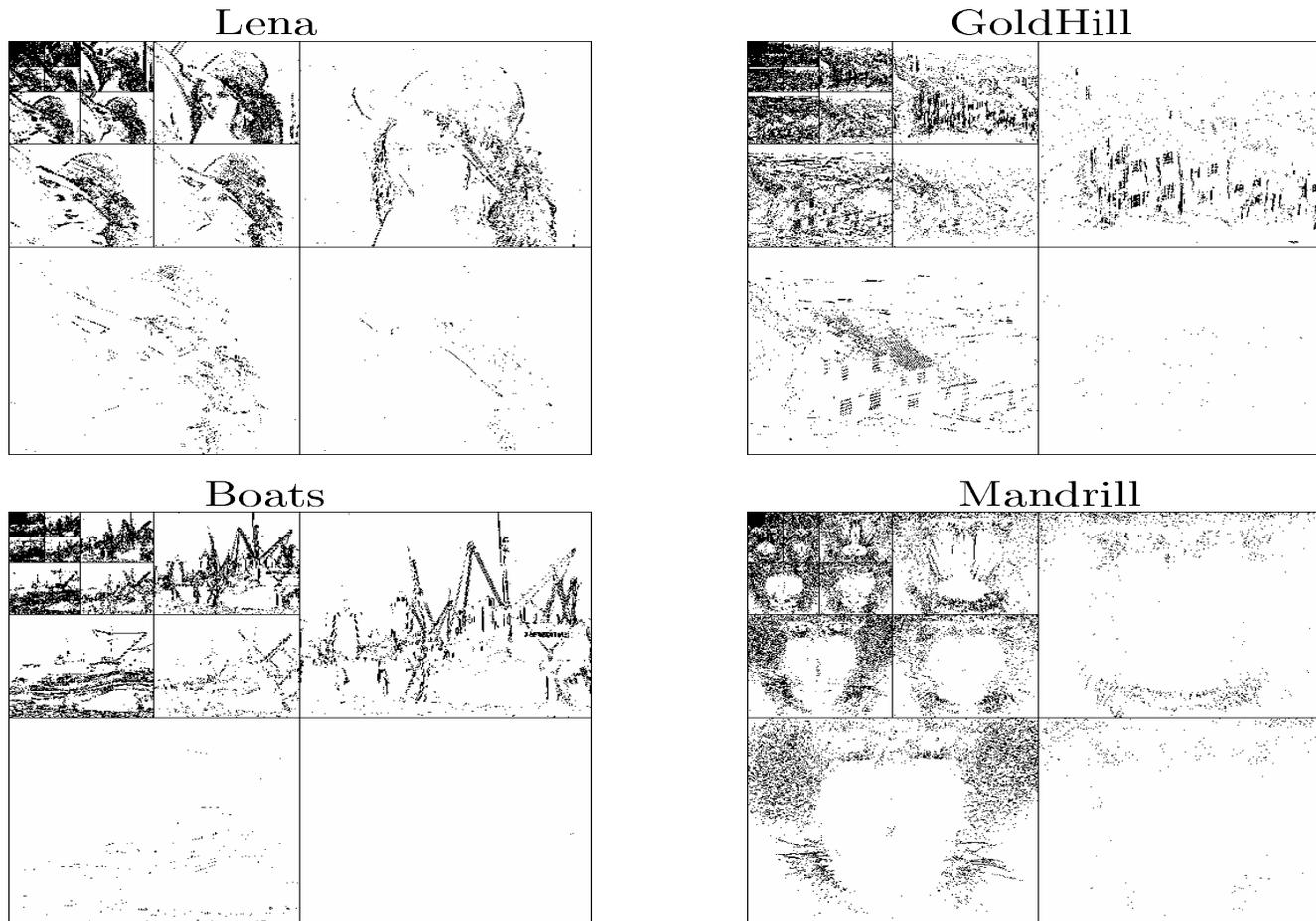
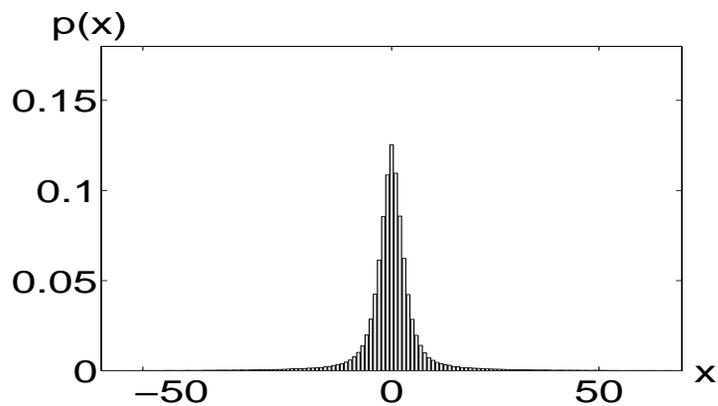
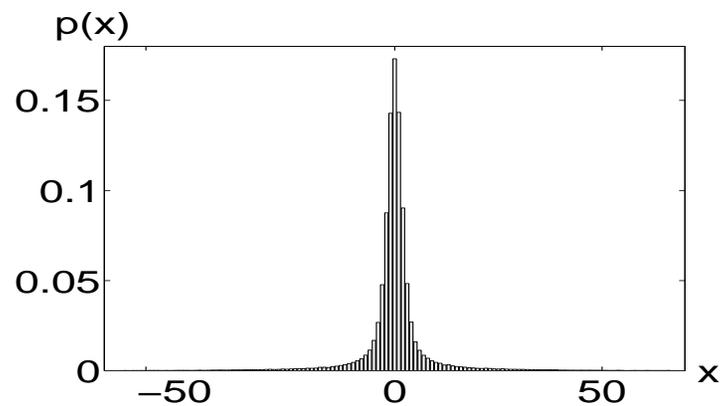


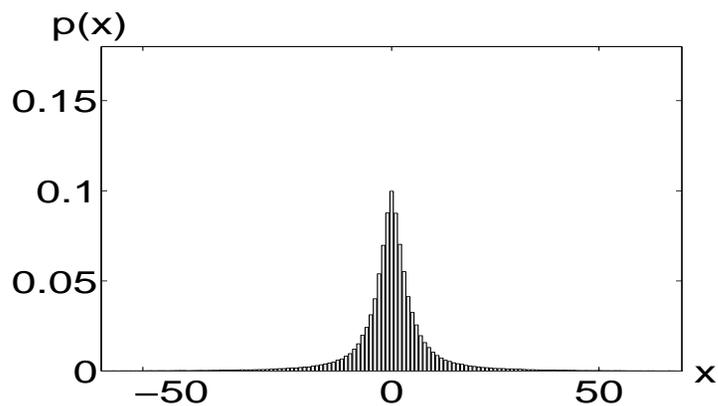
Figure 11.9: Significance map of quantized wavelet coefficients for images coded with $\bar{R} = 0.5$ bit/pixel.



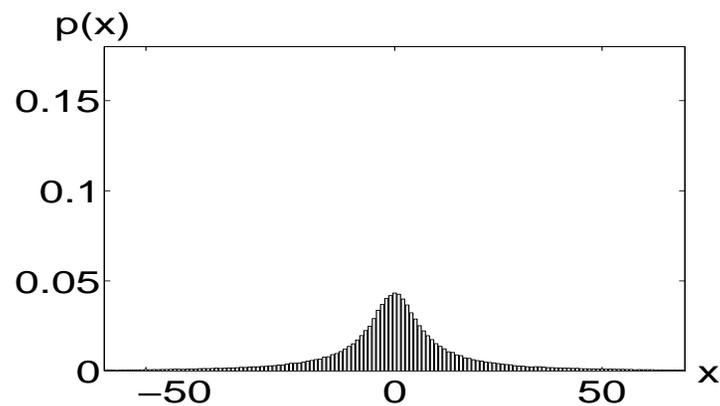
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 11.8: Normalized histograms of orthogonal wavelet coefficients for (a) Lena (b) Boats (c) GoldHill (d) Mandrill.

0.2 bit/pixel



0.05 bit/pixel



Figure 11.16: Embedded wavelet transform coding.

(a) PSNR = 36.2



34 KB

(a) JPEG

(b) PSNR = 39.2



Taxa de compressão = 20 : 1

(b) JPEG2000

(a) PSNR = 30



12 KB

(a) JPEG

(b) PSNR = 33.6



Taxa de compressão = 60 : 1

(b) JPEG2000

(a) PSNR = 26.5



8 KB

(a) JPEG

(b) PSNR = 31.0



Taxa de compressão = 100 : 1

(b) JPEG2000

Conclusões

Codificação por Transformadas

- JPEG - DCT

Vantagens: baixa complexidade, robusto, eficiente a taxas moderadas de compressão

Desvantagens: resolução única, pouca flexibilidade, efeitos quadriculados, etc

- JPEG2000 - DWT

Vantagens Eficiente mesmo em altas taxas de compressão, multirresolução, permite qualidade progressiva, etc.

- Imagens mais irregulares, impressões digitais, com texturas altamente oscilantes : outras bases são mais apropriadas (wavelet packets, local cosines)