DETECÇÃO DE SINGULARIDADES E COMPRESSÃO DE DADOS USANDO ANÁLISE DE MULTIRRESOLUÇÃO

Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional

XXIV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional

–Minicurso–

Magda K. Kaibara
Departamento de Matemática
FC/UNESP–Bauru

Sônia M. Gomes
Departamento de Matemática Aplicada
IMECC/UNICAMP

Margarete O. Domingues
Laboratório Associado de Meteorologia e Oceanografia
CPTEC/INPE

Belo Horizonte, 10–13 de setembro de 2001

Conteúdo

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

Uma das principais ferramentas para a análise de funções é a Transformada de Fourier. Ela permite a detecção de freqüências nas funções analisadas. No entanto, técnicas de Fourier não são bem apropriadas para determinar a localização física e o tipo das singularidades de uma função. Esta, pode-se dizer, foi uma das motivações para o surgimento da análise wavelet e, juntamente com ela, dos conceitos de análise de multirresolução (AMR), que permitem uma análise local da regularidade de funções.

Estas notas têm como objetivos:

- Fornecer ao leitor uma introdução aos conceitos e técnicas de uma análise de multirresolução.
- Mostrar como tais ferramentas podem ser aplicadas na representação de uma função de um modo econômico a partir de: a) uma caracterização local de regularidade (detecção de singularidades); b) uma distribuição apropriada das informações (compressão de dados).

Em uma análise de multirresolução é fundamental o processo que estabelece as relações entre as informações $\{f^{j+1}\}$ de uma dada função f no nível de resolução mais refinado $j+1$ e as informações em multinível f^{j+1}_{MR}. Assim, temos uma transformação de análise WT

$$f^{j+1} \xrightarrow{WT} f^{j+1}_{MR} \;=\; \{f^{j_0}\} \,\cup\, \{d^{j_0}\} \,\cup\, \ldots \,\cup\, \{d^{j}\},$$

em que os coeficientes d^ℓ contêm a diferença de informação entre dois níveis consecutivos ℓ e $\ell + 1$.

A transformação descrita acima deve satisfazer as seguintes propriedades.

1. A operação de *análise* WT é invertível: a informação na escala mais fina pode ser recuperada a partir dos dados em multiescala. O processo reverso é a operação de *síntese* IWT .

2. Ambas as transformações, análise e síntese, são executadas por algoritmos eficientes.

3. Os algoritmos são estáveis. Isto significa dizer que pequenas pertubações nos dados não são amplificadas, descontroladamente.

4. Os valores dos coeficientes wavelet d^ℓ são pequenos em regiões de suavidade de f. Ou seja, eles podem ser usados para caracterizar a regularidade de uma função, localmente.

Uma análise de multirresolução com estas propriedades conduz à definição de um algoritmo de compressão de dados, em que os coeficientes d^ℓ que estão abaixo de um certo parâmetro de tolerância são desprezados. Os coeficientes significativos restantes estão associados a regiões de irregularidades da função.

Na teoria de wavelets, exitem muitos exemplos de transformações deste tipo. Os casos clássicos utilizam uma estrutura de banco de filtros e aplicam-se a dados associados a discretizações periódicas em malhas uniformes. Nestas notas, estudaremos as chamadas AMR interpolantes, em que os dados f^{j+1} são valores pontuais de uma função. A principal ferramenta utilizada na definição de tais análises de multirresolução é um esquema de refinamento interpolante, que pode ser facilmente adaptado à fronteira de uma região, e nem sequer precisa de uma malha uniforme.

O material apresentado nestas notas está organizado da seguinte maneira. No segundo capítulo definimos análises de multirresolução interpolantes para dados unidimensionais e descrevemos suas aplicações na detecção de singularidades e compressão de dados, sob o ponto de vista de redução de malhas. No terceiro capítulo descrevemos as análises de multirresolução interpolantes bidimensionais, bem como sua utilização para detecção de singularidades e compressão de dados sob o ponto de vista de malhas adaptáveis regulares por blocos. No Apêndice A fazemos uma breve revisão de alguns conceitos de interpolação polinomial de Lagrange. Finalmente, no Apêndice B descrevemos o aspecto funcional associado à análise de multirresolução construída no Capítulo 2.

Os assuntos tratados neste minicurso são uma combinação dos trabalhos desenvolvidos por Kaibara (2000) e Domingues (2001), a partir das idéias de Harten (1993, 1995), Donoho (1992, 1993) e Holmströn (1997).

Capítulo 2

AMR Interpolante em 1D

Neste capítulo trabalhamos com discretizações, por valores pontuais, associadas a malhas uniformes diádicas X^ℓ do intervalo $I = [0, 1]$

$$X^\ell = \{x_k^\ell = k2^{-\ell}, 0 \leq k \leq 2^\ell\}.$$

Nota-se que $\{X^\ell\}$ é uma seqüência de malhas uniformes encaixadas $X^\ell \subset X^{\ell+1}$, sendo $X^{\ell+1}$ o refinamento da malha X^ℓ pela inclusão dos pontos médios. Os pontos $x_k^\ell \in X^\ell$ passam a ter índices pares em $X^{\ell+1}$, $x_k^\ell = x_{2k}^{\ell+1}$, enquanto que os pontos de índices ímpares de $X^{\ell+1}$ correspondem aos pontos novos $x_{2k+1}^{\ell+1} \in X^{\ell+1} \setminus X^\ell$, como ilustrado na Figura 2.1.

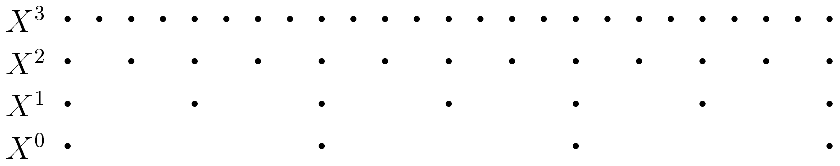

Figura 2.1: $X^\ell,\ \ell = 0, 1, 2, 3$

Em cada níve ℓ, consideramos discretizações f^ℓ formadas por valores pontuais de f nos pontos da malha X^ℓ. Ou seja, $f_k^\ell = f(x_k^\ell)$. Sendo $j+1$ o nível mais refinado, nosso objetivo é construir uma análise de multirresolução para f^{j+1}. O principal ingrediente é um operador de refinamento interpolante $P_\ell^{\ell+1}$ que permite prever os valores de f no nível $\ell+1$ a partir de informações do nível inferior ℓ.

Definição 2.1 *Um operador de refinamento interpolante* $P_\ell^{\ell+1}$ *atua sobre uma seqüência* $s^\ell(k), k=0,\dots 2^\ell$, *fornecendo como resultado uma seqüência* $s^{\ell+1}(k), k=0,\dots,2^{\ell+1}$, *de tal maneira que* $s^{\ell+1}(2k)=s^\ell(k)$.

Suponha que $s^\ell(k)=f(x_k^\ell)$ corresponde aos valores pontuais de f na malha X^ℓ. Então

$$s^{\ell+1}(2k)=s^\ell(k)=f(x_k^\ell)=f(x_{2k}^{\ell+1}).$$

Ou seja, os dados de $s^{\ell+1}$ coincidem com f nos pontos de índice par, que estão em X^ℓ. Nos exemplos de interesse, a idéia é ter um esquema de tal forma que nos pontos de índice ímpar, $s^{\ell+1}(2k-1)$ seja uma aproximação de $f_{2k-1}^{\ell+1}=f(x_{2k-1}^{\ell+1})$. Nestes pontos de $X^{\ell+1}\setminus X^\ell$, consideramos os erros de interpolação

$$d_k^\ell=f_{2k-1}^{\ell+1}-[P_\ell^{\ell+1}f^\ell](2k-1).$$

Desta forma, os valores d_k^ℓ medem a diferença de informação entre os níveis ℓ e $\ell+1$. Os coeficientes d_k^ℓ são chamados de *coeficientes wavelet* associados ao nível ℓ.

Como exemplo, considere o esquema de refinamento por interpolação linear em que $s^{\ell+1}(2k-1)=[s^\ell(k-1)+s^\ell(k)]/2$. Desta forma, d_k^ℓ representa o erro de interpolação

$$d_k^\ell=f_{2k-1}^{\ell+1}-\frac{f_{k-1}^\ell+f_k^\ell}{2},$$

como indicado na Figura 2.2.

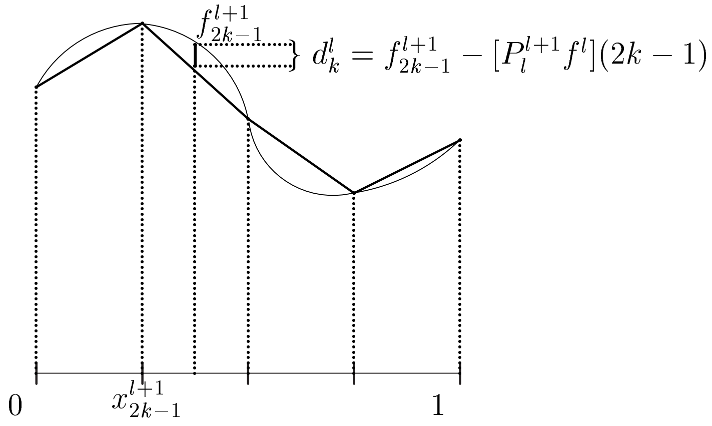

Figura 2.2: Análise de Multi-resolução Interpolante

Dado um esquema de refinamento interpolante, podemos definir os algoritmos de multirresolução $WT = WT^{j+1}_{j_0}$ e sua inversa IWT .

- **Análise** - $f^{j+1} \xrightarrow{WT} (f^{j_0}, d^{j_0}, \ldots d^j)$
  – *Para* $\ell = j, j-1, \ldots, j_0$ *façamos*
  – *Para* $k = 1, \ldots 2^\ell$ *calculemos*

$$\begin{aligned} f^\ell_k &= f^{\ell+1}_{2k} \\ d^\ell_k &= f^{\ell+1}_{2k-1} - [P^{\ell+1}_\ell f^\ell](2k-1) \end{aligned}$$

O processo inverso $IWT = IWT^{j+1}_{j_0}$ é realizado pelo algoritmo de síntese.

- **Síntese** - $(f^{j_0}, d^{j_0}, \ldots, d^j) \xrightarrow{IWT} f^{j+1}$
  – *Para* $\ell = j_0, \ldots, j$ *façamos*
  – *Para* $k = 1, \ldots, 2^\ell$ *calculemos*

$$\begin{aligned} f^{\ell+1}_{2k} &= f^\ell_k \\ f^{\ell+1}_{2k-1} &= [P^{\ell+1}_\ell f^\ell](2k-1) + d^\ell_k \end{aligned}$$

Esses processos podem ser visualizados nos diagramas das Figuras 2.3 e 2.4, respectivamente.

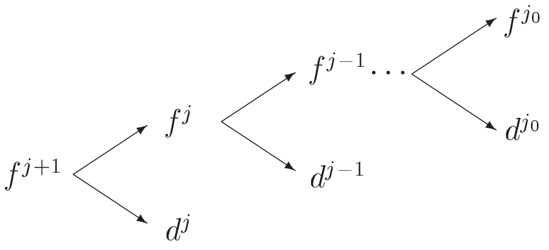

Figura 2.3: Análise

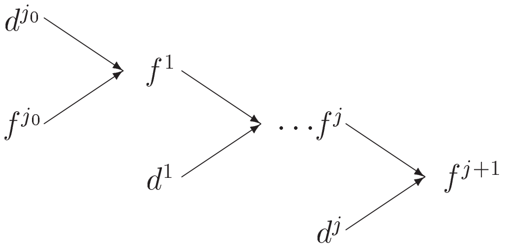

Figura 2.4: Síntese

Temos particular interesse em esquemas de refinamento por interpolação polinomial centrada de Lagrange, como descrito por Deslauries e Dubuc (1987, 1989). Um caso simples é o obtido por interpolação linear, descrito anteriormente. De modo geral, dado um número par $M \geq 2$, para calcular o valor de $s^{\ell+1}(2k-1)$ usamos o polinômio interpolador $p(x)$ que é escolhido de forma a interpolar os valores de s^ℓ associados aos M pontos centrados em torno de $x^{\ell+1}_{2k-1}$. Isto é, $p(x)$ é tal que

$$p(x^\ell_{k+m}) = s^\ell(k+m), \qquad -M/2 \leq m < M/2.$$

É possıvel que, próximo da fronteira do intervalo, estes pontos de interpolação não possam ser escolhidos de maneira centrada. Em tais casos, modificamos o algoritmo escolhendo os pontos de interpolação que estejam mais próximo de $x^{\ell+1}_{2k-1}$. A seguir damos mais detalhes deste esquema.

Descrição do esquema de refinamento por interpolação polinomial

Para que não exista interação entre as fronteiras do intervalo, assumimos que o nível menos refinado seja tal que $2^{j_0} > 2M$.

Seja $\mu = x_{2k-1}^{\ell+1} = (2k-1)2^{-\ell-1} \in X^{\ell+1} \setminus X^{\ell}$, $\ell \geq j_0$. Definimos o valor de $s^{\ell+1}(2k-1)$, por

$$s^{\ell+1}(2k-1) = p(\mu), \tag{2.1}$$

em que p é o polinômio de grau $M-1$ que satisfaz

$$p(\nu) = s^{\ell}(m),\ \nu = m2^{-\ell} \in \mathcal{S}(\mu)$$

em que os pontos de interpolação ν variam num subconjunto $\mathcal{S}(\mu) \subset X^{\ell}$. Dependendo da posição de μ em $X^{\ell+1}$, $\mathcal{S}(\mu)$ é de uma das seguintes formas

1. Para $\mu = x_{2k-1}^{\ell+1}$ próximo do extremo inferior do intervalo: $0 < k \leq M/2 - 1$. Neste caso

   $$\mathcal{S}(\mu) = \{x_m^{\ell} = m2^{-\ell},\ 0 \leq m \leq M-1\}, \tag{2.2}$$

   e,

   $$p(\mu) = \sum_{m=0}^{M-1} s^{\ell}(m) c_{k,m}, \tag{2.3}$$

   em que

   $$c_{k,m} = \prod_{n=0,\, n\neq m}^{M-1} \frac{2k-2n-1}{2m-2n}. \tag{2.4}$$

2. Para $\mu = x_{2k-1}^{\ell+1}$ longe dos extremos do intervalo: $M/2-1 < k \leq 2^{\ell}-(M/2-1)$. Neste caso

   $$\mathcal{S}(\mu) = \{x_m^{\ell} = m2^{-\ell},\ k - M/2 \leq m \leq k + M/2 - 1\}, \tag{2.5}$$

   e,

   $$p(\mu) = \sum_{m=0}^{M/2-1} c_{k,m}(s^{\ell}(\ell+m) + s^{\ell}(\ell-m-1)), \tag{2.6}$$

em que

$$c_{k,m} = \frac{1}{2^{M-1}} \prod_{n=-M/2,\, n\neq m}^{M/2-1} \frac{2n+1}{n-m}. \tag{2.7}$$

3. Para $\mu = x_{2k-1}^{\ell+1}$ próximo a fronteira superior do intervalo: $2^\ell - (M/2-1) < k \leq 2^\ell$.
   Neste caso

$$\mathcal{S}(\mu) = \{x_m^\ell = m2^{-\ell},\ 2^\ell - (M-1) \leq m \leq 2^\ell\}, \tag{2.8}$$

e,

$$p(\mu) = \sum_{m=2^\ell-M+1}^{2^\ell} s^\ell(m) c_{k,m}, \tag{2.9}$$

em que

$$c_{k,m} = \prod_{n=2^l-M+1,\, n\neq m}^{2^l} \frac{2k-2n-1}{2m-2n}. \tag{2.10}$$

Observemos que

1. Os coeficientes $c_{k,m}$ não dependem do nível ℓ de resolução.
2. Longe dos extremos do intervalo, $c_{k,m} = c_m$, isto é, estes coeficientes não dependem do ponto $x_{2k-1}^{\ell+1}$. Isto não ocorre próximo dos extremos.
3. No extremo inferior, os valores $c_{k,m}$ em (2.4) são os mesmos do extremo superior, em (2.10), com a ordem invertida.
4. Devido a definição de $[P_\ell^{\ell+1} f^\ell](2k-1)$ como o valor do polinômio interpolador $p(x)$ em $(2k-1)2^{-\ell-1}$, segue que se f é um polinômio de grau menor ou igual a $M-1$ então $d_k^\ell = 0$, isto é, o esquema de multirresolução reproduz polinômios.

Na Tabela 2.1 fornecemos os coeficientes c_m quando $\mu = x_{2k-1}^{\ell+1}$ está no interior do intervalo e na Tabela 2.2 esses valores são fornecidos de acordo com a posição de μ em relação à fronteira inferior do intervalo $[0, 1]$.

Tabela 2.1: **Coeficientes de interpolação centrada**

M	c_0	c_1	c_2
2	1/2		
4	9/16	-1/16	
6	150/256	-25/256	3/256

Tabela 2.2: **Coeficientes de interpolação próximo da fronteira inferior**

M	k	$c_{k,0}$	$c_{k,1}$	$c_{k,2}$	$c_{k,3}$	$c_{k,4}$	$c_{k,5}$
2	1	1/2					
4	1	5/16	15/16	-5/16	1/16		
6	1	63/256	315/256	-105/128	63/128	-45/256	7/256
	2	-7/256	105/256	105/128	-35/128	21/256	-3/256

2.1 Convergência do Esquema de Refinamento: Estabilidade

Para aplicar uma análise de multirresolução a problemas práticos, tanto para análise como para compressão de dados, é necessário garantir que os algoritmos de análise WT e de síntese IWT sejam estáveis com relação a perturbações nos dados. A seguir estudaremos esta questão da estabilidade para as análises de multirresolução interpolantes descritas anteriormente.

É simples verificar a estabilidade do algoritmo de análise. De fato, se os dados f^{j+1} forem substituidos por dados perturbados f_ϵ^{j+1}, então é claro que a mesma perturbação é transferida diretamente para os dados f_ϵ^ℓ dos níveis inferiores $\ell \leq j$. Queremos mostrar que a perturbação nos coeficientes wavelet $d_{\epsilon,k}^\ell$ também é da mesma ordem. Por definição, temos que

$$d_k^\ell - d_{\epsilon,k}^\ell = f_{2k-1}^{\ell+1} - f_{\epsilon,2k-1}^{\ell+1} + P_\ell^{\ell+1}[f^\ell - f_\epsilon^\ell](2k-1).$$

Como os coeficientes de interpolação são limitados (não dependem do nível), segue que existe uma constante C_1 tal que $||P_\ell^{\ell+1} s^\ell|| \leq C_1 ||s^\ell||$. Com este resultado, concluimos que a ordem da perturbação nos coeficientes wavelet é a mesma da perturbação nos dados de entrada.

Da mesma forma, se os coeficientes wavelet d^ℓ forem substituidos por d^ℓ_ϵ, gostaríamos de mostrar que, após o algoritmo de síntese, a perturbação $f^{j+1} - f^{j+1}_\epsilon$ fica da mesma ordem de $d^\ell - d^\ell_\epsilon$. No nível $\ell + 1$ temos que

$$f^{\ell+1}_{2k-1} - f^{\ell+1}_{\epsilon,2k-1} = d^\ell_k - d^\ell_{\epsilon,k} - P^{\ell+1}_\ell [f^\ell - f^\ell_\epsilon](2k-1).$$

Portanto, pelo mesmo argumento anterior, segue que a perturbaçaõ neste nível se mantém controlada. No entanto, para alcançar o nível mais refinado $j + 1$, teremos que aplicar o esquema de refinamento, sucessivamente. É nesse processo iterativo que pode existir o perigo de que a perturbação seja amplificada, descontroladamente. No caso do esquema de refinamento por interpolação polinomial de Lagrange, descrito anteriormente, isto não ocorre pois o esquema é *convergente*, como definido a seguir.

Definição 2.2 *Seja P^{l+1}_l um esquema de refinamento interpolante. Dada um conjunto inicial de dados s^j, define-se $s^\ell, \ell > j$, pela aplicação iterativa do esquema de refinamento $s^l = P^l_{l-1} s^{l-1}$. O esquema de refinamento é dito convergente se para todo s^j existe uma função contínua $I^j(x; s^j)$ que coincide com $s^\ell(k)$ nos pontos $x^\ell_k \in X^\ell$, para todo $\ell \geq j$. Isto é,*

$$I^j(x^\ell_k; s^j) = s^\ell(k), \ \ \ell \geq j,$$

É sabido que os esquemas de refinamento por interpolação polinomial de Lagrange, indicados na seção anterior, são convergentes Deslauries e Dubuc (1989). Isto é claro no caso de interpolação linear, em que $I^j(x; s^j)$ é a função contínua e linear por partes em X^j. Mais detalhes sobre este assunto serão dados no Apêndice B.

É interessante observar que a questão da convegência de esquemas de refinamento ocorre naturalmente em modelagem geométrica computacional (CAGD), em que tais esquemas são utilizados para gerar curvas ou superfícies suaves a partir de um certo conjunto discreto de dados.

Se um esquema de refinamento for convergente, podemos concluir que uma pertubação em um nível qualquer não é amplificada, descontroladamente, nos níveis superiores pelo processo de refinamento iterativo. Em análise wavelet, este fato também é de fundamental importância, pois está associado com a estabilidade dos algoritmos de multirresolução correspondentes.

2.2 Análise Local de Regularidade: Detecção de Singularidades

Juntamente com a questão da estabilidade, que foi analisada na seção anterior, um outro aspecto que é também fundamental nas aplicações de uma análise de multiressolução é a chamada caracterização local de regularidade. Nesta seção, analisaremos este assunto para o caso de análises de multirresolução interpolantes.

Da teoria de interpolação polinomial de Lagrange, sabe-se que o erro de interpolação depende da regularidade de f no intervalo que contém os pontos de interpolação **?**). Desta forma, os coeficientes wavelet de uma análise de multirresolução interpolante, sendo definidos como erros de interpolação, contêm informações sobre a regularidade local da função analisada.

Por exemplo, considerando $M=2$, tem-se que

$$d_k^\ell = f_{2k-1}^{\ell+1} - \frac{1}{2}(f_{k-1}^\ell + f_k^\ell).$$

Logo

$$\begin{aligned} |d_k^\ell| &= |f_{2k-1}^{\ell+1} - \frac{1}{2}(f_{k-1}^\ell + f_k^\ell)| \\ &= |\frac{1}{2}\left[f_{2k-1}^{\ell+1} - f_{k-1}^\ell\right] + \frac{1}{2}\left[f_{2k-1}^{\ell+1} - f_k^\ell\right]| \\ &\leq \max\left\{|f_{2k-1}^{\ell+1} - f_{k-1}^\ell|, |f_{2k-1}^{\ell+1} - f_k^\ell|\right\}. \end{aligned}$$

Portanto, tem–se que

$$|d_k^\ell| \leq \omega_{J_k^\ell}(f; 2^{-\ell}), \tag{2.11}$$

em que $J_k^\ell = [x_{k-1}^\ell, x_k^\ell]$ e

$$w_J(f;h) = sup\{|f(x+\hat{h}) - f(x)| : \ x,\ x+\hat{h} \in J, |\hat{h}| \leq h\}$$

é o módulo de continuidade de f em J.

Se $f(x)$ for diferenciável, o teorema do valor médio implica que exitem $x_{k-1}^{\ell} < \eta_1 < x_{2k-1}^{\ell+1}$ e $x_{2k-1}^{\ell+1} < \eta_2 < x_k^{\ell}$ tais que

$$d_k^{\ell} = \frac{2^{-\ell}}{4}\left[f^{(1)}(\eta_1) - f^{(1)}(\eta_2)\right],$$

em que $f^{(1)}$ é a derivada de f. Logo

$$|d_k^{\ell}| \leq \frac{2^{-\ell}}{4}\,\omega_{J_k^{\ell}}(f^{(1)}; 2^{-\ell}). \tag{2.12}$$

Se $f(x)$ for duas vezes diferenciável, com a segunda derivada $f^{(2)}$ limitada, então uma análise mais cuidadosa mostra que

$$|d_k^{\ell}| \leq \frac{2^{-2\ell}}{8} \max_{\xi \in J_k^{\ell}} |f^{(2)}(\xi)|. \tag{2.13}$$

No caso geral, para uma interpolação de ordem $M-1$, usando o resultado do Teorema A.1, os coeficientes wavelet podem ser avaliados da seguinte forma.

Teorema 2.1 *Para $\mu = x_{2k-1}^{\ell+1} \in X^{\ell+1} \setminus X^{\ell}$, sejam $\mathcal{S}(\mu)$ o seu estêncil de interpolação, como descrito em (2.2), (2.5) e (2.8), e J_μ o menor intervalo que contém $\mathcal{S}(\mu)$. Logo*

1. *Existe uma constante $K = K(M)$ tal que*

$$|d_k^{\ell}| \leq K \max_{\nu \in \mathcal{S}(\mu)} |f(\nu) - f(\mu)|,$$

o que implica

$$|d_k^{\ell}| \leq K w_{J_\mu}(f; 2^{-\ell}) \tag{2.14}$$

2. *Se $f \in C^m(J_\mu)$ e possui derivada de ordem $(m+1)$ integrável e limitada, $1 \leq m \leq M-1$, então existe $K = K(m, M)$ tal que*

$$|d_k^{\ell}| \leq K 2^{-\ell(m+1)} \max_{x \in J_\mu} |f^{(m+1)}(x)|. \tag{2.15}$$

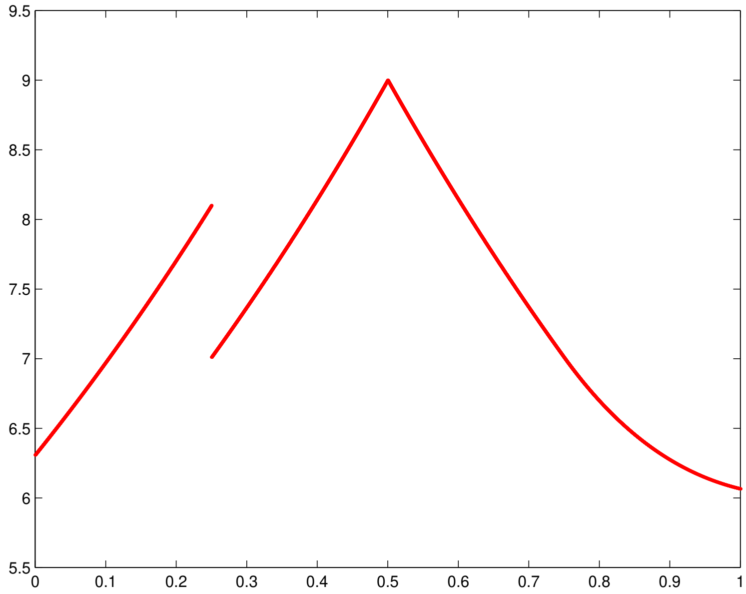

Figura 2.5: $f(x)$

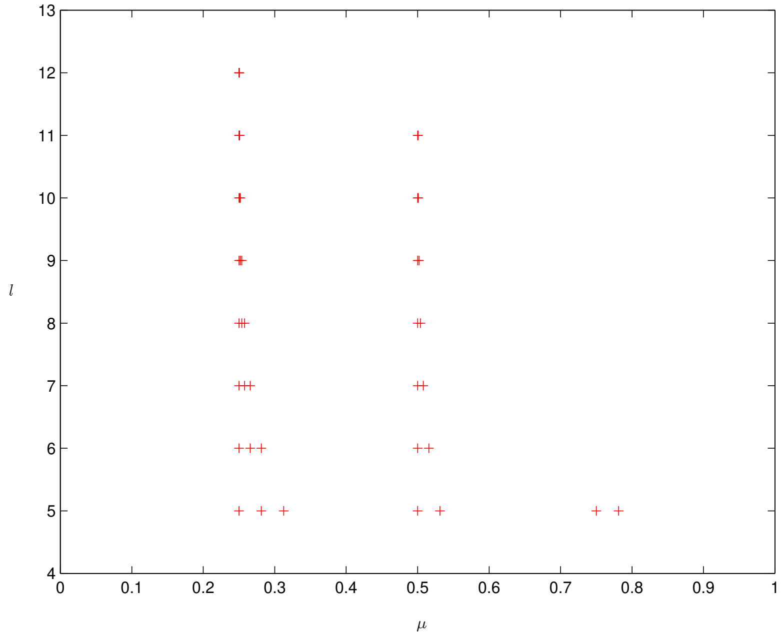

Figura 2.6: Coeficientes wavelet significativos

Em resumo, o Teorema 2.1 fornece uma relação entre a taxa de decaimento dos coeficientes wavelet e a regularidade local de uma função usando a análise de multirresolução de valores pontuais. Quanto mais regular for a função, maior é a taxa de decaimento destes coeficientes. Desta forma, os resultados mostram que os coeficientes wavelet d_k^ℓ podem ser usados como indicadores da regularidade local de uma função. Por exemplo, consideremos a função

$$f(x) = \begin{cases} 8.1\ e^{1/4}\ e^{-|x-1/2|}, & x \leq 1/4, \\ 9\ e^{-|x-1/2|}, & 1/4 \leq x \leq 3/4, \\ e^{-|x-1/2|}\ (16x^2 - 24x + 18), & x \geq 3/4, \end{cases}$$

plotada na Figura 2.5. No ponto $\xi = 1/4$, f é descontínua; no ponto $\xi = 1/2$, f é contínua com derivada de primeira ordem descontínua; no ponto $\xi = 3/4$, f e sua derivada de primeira ordem são contínuas com a derivada de segunda ordem descontínua. Usando a análise de multirresolução interpolante com $M = 4$, definimos

$$A_\ell(\xi) = \max\{|d_k^\ell| :\ |x_{2k-1}^{\ell+1} - \xi| \leq M/2\}.$$

Segundo o Teorema 2.1, esperamos que a função $\alpha(\ell) = logA_\ell(\xi)/log2$ se comporte como uma reta com inclinações 0, -1 e -2 para $\xi = 1/4$, $\xi = 1/2$ e $\xi = 3/4$, respectivamente. De fato, fazendo um ajuste por mínimos quadrados, a inclinação da reta que melhor se ajusta aos dados plotados na figura 2.7 são -0.0004, -1.0149 e -1.9538. Ainda com relação à função do exemplo anterior, na Figura 2.6 marcamos no plano posição $\times$ escala aqueles pontos $\mu = (2k-1)2^{-(\ell+1)}$ para os quais $|d_k^\ell| > \epsilon$, $6 \leq \ell \leq 12$, em que $\epsilon = 10^{-3}$. Esta marcação indica claramente a posição das singularidades da função. Ou seja, desprezando os valores de $|d_k^\ell|$ que estão abaixo deste parâmetro, notamos que os coeficientes wavelet não negligenciados, isto é, os *coeficientes wavelet significativos*, estão concentrados perto das singularidades da função. Notamos ainda na Figura 2.6 que, no plano posição $\times$ escala, a disposição dos coeficientes wavelet significativos apresenta uma concentração em regiões que possuem a forma geométrica de cones cujos vértices apontam para a localização das singularidades.

2.3 Compressão de Dados: Redução de Malhas

Com base nas observações das seções anteriores, veremos a seguir como representações compactas podem ser realizadas nos contextos de análises de multirresolução interpolantes. Tais representações podem ser tanto em termos dos coefi-

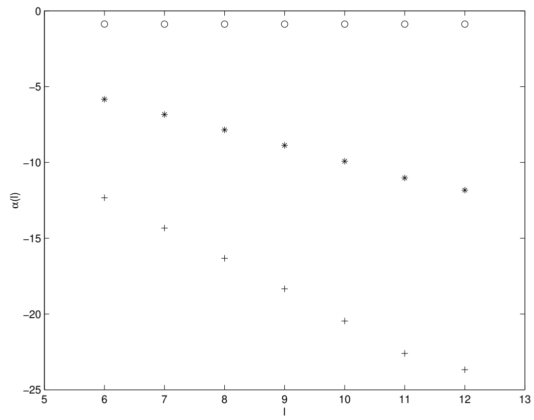

Figura 2.7: $\alpha(\ell) = logA_\ell(\xi)/log2$
(o) $\rightarrow \xi = 1/4$
(*) $\rightarrow \xi = 1/2$
(+) $\rightarrow \xi = 3/4$

cientes wavelet significativos, quanto em termos dos valores pontuais associados a tais coeficientes. Este processo dá origem a malhas que são esparsas nas regiões em que a função é suave e refinadas perto de singularidades. A utilização deste tipo de malha torna-se interessante quando pretende-se construir esquemas numéricos em situações que apresentam singularidades isoladas. É importante observar que, neste tipo de técnica, a estrutura da malha adaptável resultante é totalmente dependente do função analisada.

O princípio básico a ser utilizado é a caractrização local de regularidade em termos do decaimento dos coeficientes wavelet e a principal estratégia é definida por um esquema de truncamento. Neste trabalho, consideraremos o seguinte algoritmo.

Agoritmo de Truncamento

- **Input:** f^{j+1}, ϵ
- **Passo 1: Análise**

$$f^{j+1} \xrightarrow{WT} f^{j+1}_{MR} = (f^{j_0}, d^{j_0}, \dots d^j).$$

- **Passo 2: Truncamento**

$$d^{\ell}_{\epsilon,k} = \begin{cases} d^{\ell}_k & \text{se } |d^{\ell}_k| > \epsilon \\ 0 & \text{se } |d^{\ell}_k| \leq \epsilon \end{cases}$$

- **Output** $f^{j+1}_{\epsilon,MR} = (f^{j_0}, d^{j_0}_{\epsilon}, \dots d^{j}_{\epsilon})$.

Seja f^{j+1}_{ϵ} o resultado de aplicar o algoritmo de síntese sobre a informação truncada $f^{j+1}_{\epsilon,MR}$. É interessante observar que, como consequência da propriedade de estabilidade, o erro cometido neste processo de truncamento pode ser estimado por

$$||f^{j+1} - f^{j+1}_{\epsilon}|| = O(\epsilon).$$

Isto mostra que é possível representar uma função com uma precisão desejada ϵ considerando apenas as informações em multinível correspondentes aos coeficientes wavelet de magnitude acima de ϵ. Além disto, verifica-se também que o número $\mathcal{N}_s$ de coeficientes wavelet significativos depende de ϵ e de M, de acordo com a seguinte relação

$$\mathcal{N}_s = O(\epsilon^{-1/M}), \tag{2.16}$$

Para maiores detalhes, indicamos a referência **?**).

Em algumas aplicações, como em processamento de sinais e imagens, a compressão de dados é mais efetiva se trabalhada após o processo de truncamento, diretamente sobre os coeficientes wavelet não nulos restantes. No entanto, ocorrem certas aplicações que envolvem operações que são melhor efetuadas em termos dos valores pontuais das funções. Este é caso, por exemplo, da solução numérica de equações envolvendo operadores diferenciais com termos não lineares. Tendo em vista este tipo de aplicações, ao invés de trabalharmos com a representação em multiressolução truncada, como indicado acima, são úteis as representações por valores pontuais associados aos pontos correspondentes aos coeficentes wavelet significativos.

Definição 2.3 Malhas Adaptáveis *Sejam ϵ um parâmetro de tolerância, e $j+1$ o nível de resolução mais refinado. Para uma dada função f, consideramos a malha*

$\mathcal{M}_\epsilon \subset X^{j+1}$ *definida pelo conjunto*

$$\mathcal{M}_\epsilon = X_{j_0} \cup \mathcal{D}_\epsilon.$$

em que

$$\mathcal{D}_\epsilon = \{\mu = x_{2k-1}^{\ell+1} : |d_k^\ell| > \epsilon, \;\; j_0 \leq \ell \leq j\}. \tag{2.17}$$

Define-se então a representação compacta de f *como sendo o conjunto de valores* $\{f_k^{j+1}\}$ *tais que* $x_k^{j+1} \in \mathcal{M}_\epsilon$.

Usando a análise de multirresolução interpolante com $M = 4$ (interpolação cúbica), apresentamos na Figura 2.8 a distribuição, no plano posição $\times$ escala, de algumas malhas $\mathcal{M}_\epsilon$ adaptáveis à função

$$f(x) = 5 \; sen^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) \; cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2 \; \exp^{-12500\left(x-\frac{1}{4}\right)^2}.$$

Para $\epsilon = 10^{-2}, 10^{-4}$ e 10^{-6}, $\mathcal{M}_\epsilon$ possui $36, 84$ e 265 pontos, respectivamente, tendo-sempre como referência o nível mais refinado de uma malha regular com 2049 pontos $(j + 1 = 11)$ e o nível menos refinado de $j_0 = 3$.

Na Figura 2.9 apresentamos o número coeficientes wavelet significativos $\mathcal{N}_s$, que é da mesma ordem do número de pontos presentes na representação da função f na malha $\mathcal{M}_\epsilon$, para $\epsilon = 10^{-10}, \cdots, 1$. A construção dessas representações tem como base uma malha regular X^{j+1}, para $j + 1 = 10$ e 11. Observamos nessa figura que para valores de $\epsilon > 10^{-4}$ basta iniciarmos a construção da malha $\mathcal{M}_\epsilon$ a partir da malha regular X^{10}. Assintoticamente, quando $\epsilon \to 0$, as curvas representadas nessa figura possuem uma inclinação de $\approx -1/4$. Esse resultado concorda com as estimativas de Donoho (1992) indicadas em (2.16).

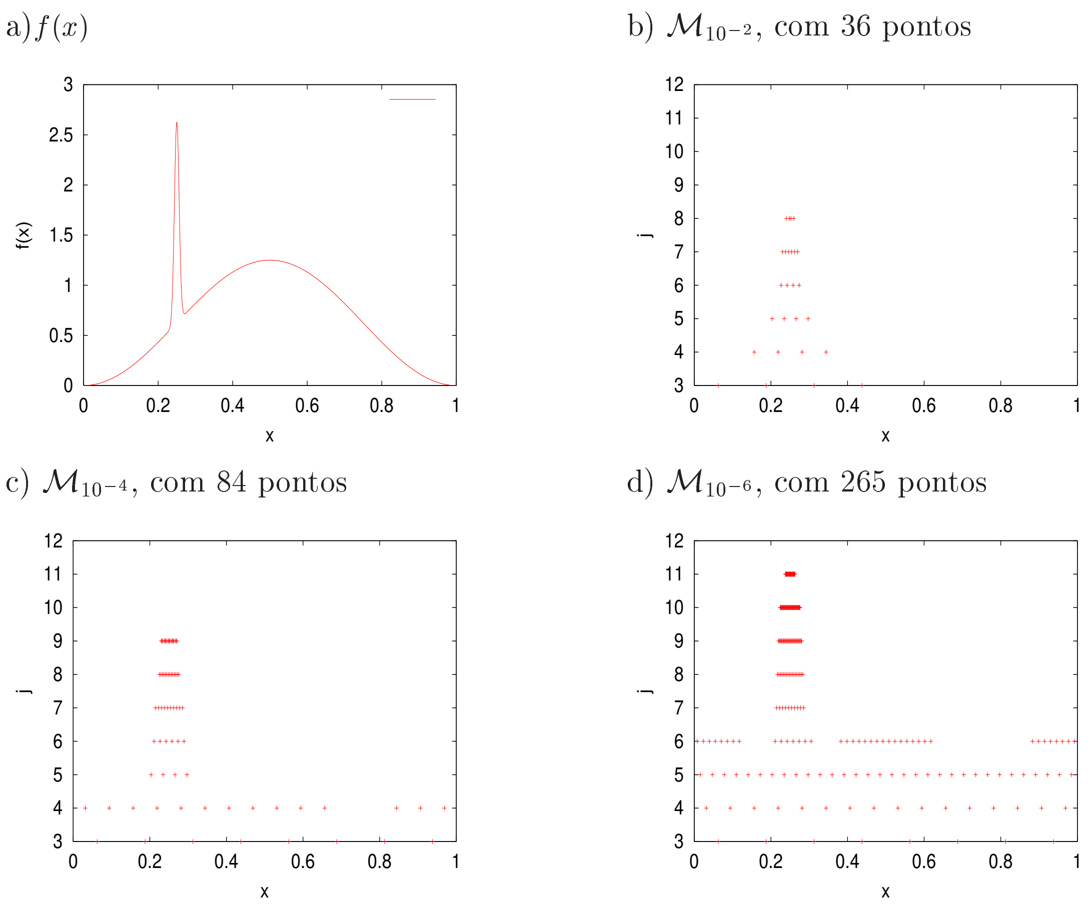

Figura 2.8: Representação de $f(x)$ em malhas adaptáveis $\mathcal{M}_\epsilon$, para $\epsilon = 10^{-2}, 10^{-4}$ e 10^{-6}, com $M = 4$, $j + 1 = 11$ e $j_0 = 3$.

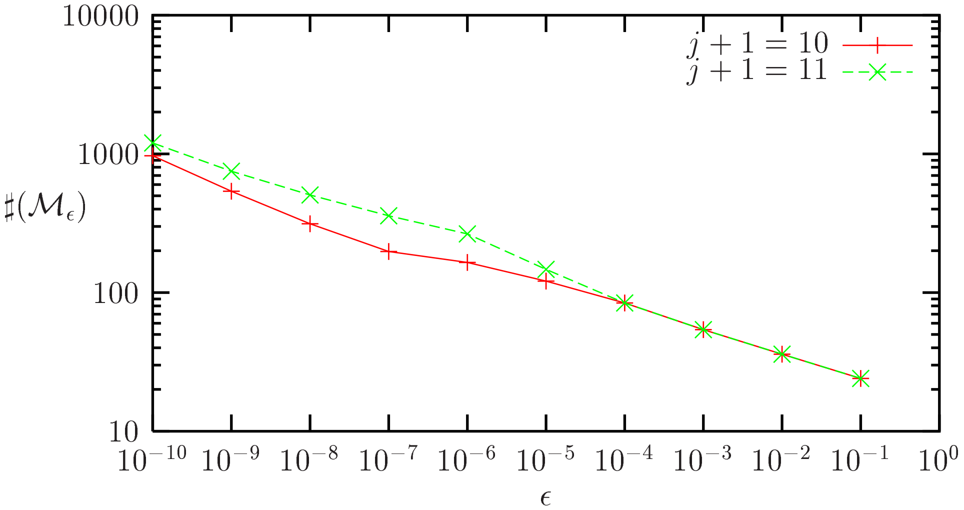

Figura 2.9: Número de coeficientes significativos $|d_k^\ell| > \epsilon$ em malhas X^{j+1}, para $j+1 = 10$ e 11.

Capítulo 3

AMR Interpolante em 2D

Neste capítulo apresentamos a análise de multirresolução interpolante em malhas diádicas uniformemente espaçadas de $I \times I$. Numa AMR interpolante bidimensional trabalhamos com valores pontuais $f^\ell_{k,m} = f(x^\ell_k, y^\ell_m)$ em malhas diádicas

$$\mathcal{X}^\ell = \{(x^\ell_k, y^\ell_m) = (kh^\ell_x, mh^\ell_y) \in I \times I : 0 \leq k < N^\ell_x,\ 0 \leq m < N^\ell_y\} \tag{3.1}$$

em que $N^\ell_x = 2^{\ell+p_0}$, $N^\ell_y = 2^{\ell+q_0}$, $h^\ell_x = 1/N^\ell_x$ e $h^\ell_y = 1/N^\ell_y$. Essas malhas, como no caso unidimensional, também são encaixantes, $\mathcal{X}^\ell \subset \mathcal{X}^{\ell+1}$, de tal forma que os pontos $(x^\ell_k, y^\ell_m) \in \mathcal{X}^\ell$ passam a ser os pontos $(x^{\ell+1}_{2k}, y^{\ell+1}_{2m})$ da malha mais refinada $\mathcal{X}^{\ell+1}$, conforme ilustrado na Figura 3.1.

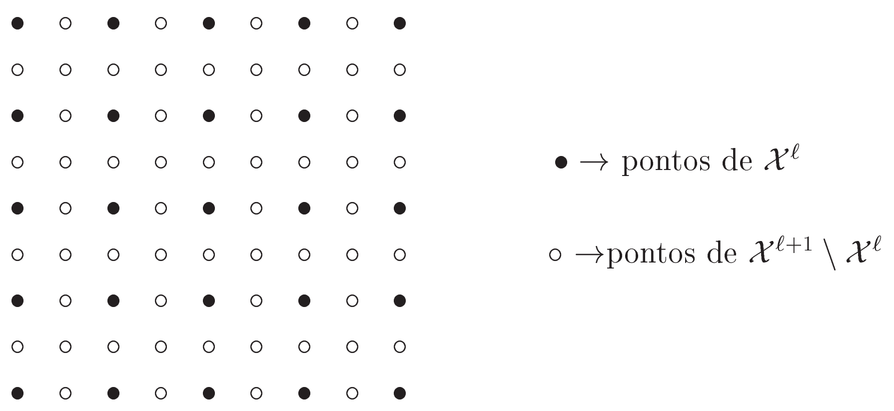

Figura 3.1: Ilustração dos pontos de uma malha $\mathcal{X}^{\ell+1}$.

Analogamente ao caso unidimensional, podemos definir uma análise de multirresolução interpolante para os dados f^{j+1} associados a um nível de resolução mais refinado $j+1$. Em cada passo do algoritmo de análise, para passar de um nível $\ell+1$ para o nível inferior ℓ, temos uma transformação

$$\{f^{\ell+1}\} \to \{f^{\ell}, d^{(1),\ell}, d^{(2),\ell}, d^{(3),\ell}\}.$$

Como $(x_{2k}^{\ell+1}, y_{2m}^{\ell+1}) = (x_k^{\ell}, y_m^{\ell})$, segue que $f_{k,m}^{\ell} = f_{2k,2m}^{\ell+1}$. Logo, para obter f^{ℓ} a partir de $f^{\ell+1}$ devemos descartar os valores de $f^{\ell+1}$ em que um dos índices seja ímpar. Os coeficientes wavelet $d_{s,q}^{(\alpha)\,\ell}$ são definidos como os erros entre os valores da função f nos pontos de $\mathcal{X}^{\ell+1} \setminus \mathcal{X}^{\ell}$ e aqueles obtidos por interpolação a partir dos valores de f em $\mathcal{X}^{\ell}$, conforme indicado na Figura 3.2. Uma vez definido um algoritmo de refinamento interpolante bidimensional $\mathcal{P}_{\ell}^{\ell+1}$, calcula-se $\tilde{f}^{\ell+1} = \mathcal{P}_{\ell}^{\ell+1} f^{\ell}$ e então define-se

$$\begin{aligned} d_{k,m}^{(1)\,\ell} &= f_{2k,2m+1}^{\ell+1} - \tilde{f}_{2k,2m+1}^{\ell+1}, \\ d_{k,m}^{(2)\,\ell} &= f_{2k+1,2m}^{\ell+1} - \tilde{f}_{2k+1,2m}^{\ell+1}, \\ d_{k,m}^{(3)\,\ell} &= f_{2k+1,2m+1}^{\ell+1} - \tilde{f}_{2k+1,2m+1}^{\ell+1}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

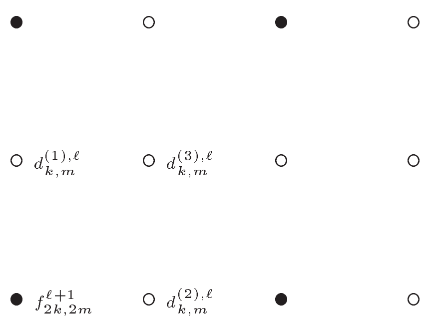

Figura 3.2: Ilustração de alguns pontos de uma malha $\mathcal{X}^{\ell+1}$. O símbolo $\circ$ representa as posições associadas aos coeficientes wavelet.

Em malhas retangulares, o algoritmo de refinamento interpolante $\mathcal{P}_\ell^{\ell+1}$ pode ser definido em termos de interpolação polinomial em cada uma das coordenadas, separadamente. Ou seja, um algoritmo de refinamento unidimendional $P_\ell^{\ell+1}$ pode ser aplicado em cada uma das coordenadas, como discriminado a seguir. Supondo que estamos longe da fronteira do quadrado, definimos $\tilde{f}^{\ell+1} = \mathcal{P}_\ell^{\ell+1} f^\ell$ tal que $\tilde{f}_{2k,2m}^{\ell+1} = f_{k,m}^\ell$ e

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{2k,2m+1}^{\ell+1} &= \sum_q f_{k,q}^\ell \;\; c_q \\
\tilde{f}_{2k+1,2m+1}^{\ell+1} &= \sum_s \sum_q f_{s,q}^\ell \;\; c_s \;\; c_q \\
\tilde{f}_{2k+1,2m}^{\ell+1} &= \sum_s f_{s,m}^\ell \;\; c_s.
\end{aligned}$$

Observamos que $\tilde{f}_{2k,2m+1}^{\ell+1}$ é obtido pela aplicação do operador $P_\ell^{\ell+1}$ na direção y (referente ao índice q de $f_{k,q}^\ell$). Analogamente, $\tilde{f}_{2k+1,2m}^{\ell+1}$ é obtido pela aplicação do esquema de refinamento unidimensional na direção x (referente ao índice s de $f_{s,m}^\ell$). Por outro lado, $\tilde{f}_{2k+1,2m+1}^{\ell+1}$ é obtido após a aplicação do esquema de refinamento na direção x (índice s) e a seguir na direção y (índice q) de $f_{s,q}^\ell$.

Os coeficientes de interpolação $\{c\}$ são aqueles apresentados na Tabela 2.1. Próximo à fronteira do quadrado, na direção em que seja necessário, utilizamos os coeficientes de interpolação dados na Tabela 2.2.

Concluindo, os algoritmos de análise e de síntese para o caso bidimensional são descritos a seguir.

- **Análise** - $f^{j+1} \xrightarrow{WT} (f^{j_0}, d^{(1,2,3)j_0}, \ldots d^{(1,2,3),j})$
  – *Para* $\ell = j, j-1, \ldots, j_0$
  – *Para* $k = 1, \ldots N_x^\ell$
  – *Para* $m = 1, \ldots N_y^\ell$

$$\begin{aligned}
f_{k,m}^\ell &= f_{2k,2m}^{\ell+1} \\
d_{k,m}^{(1)\,\ell} &= f_{2k,2m+1}^{\ell+1} - \tilde{f}_{2k,2m+1}^{\ell+1} \\
d_{k,m}^{(2)\,\ell} &= f_{2k+1,2m}^{\ell+1} - \tilde{f}_{2k+1,2m}^{\ell+1} \\
d_{k,m}^{(3)\,\ell} &= f_{2k+1,2m+1}^{\ell+1} - \tilde{f}_{2k+1,2m+1}^{\ell+1}
\end{aligned}$$

- **Síntese** - $(f^{j_0}, d^{(1,2,3)j_0}, \dots, d^{(1,2,3)j}) \xrightarrow{IWT} f^{j+1}$
  - *Para* $\ell = j_0, \dots, j$
  - *Para* $k = 1, \dots, N_x^\ell$
  - *Para* $m = 1, \dots N_y^\ell$

$$
\begin{aligned}
f^{\ell+1}_{2k,2m} &= f^\ell_k \\
f^{\ell+1}_{2k,2m+1} &= d^{(1)\,\ell}_{k,m} + \tilde{f}^{\ell+1}_{2k,2m+1} \\
f^{\ell+1}_{2k+1,2m} &= d^{(2)\,\ell}_{k,m} + \tilde{f}^{\ell+1}_{2k+1,2m} \\
f^{\ell+1}_{2k+1,2m+1} &= d^{(3)\,\ell}_{k,m} + \tilde{f}^{\ell+1}_{2k+1,2m+1}
\end{aligned}
$$

3.1 Detecção de Singularidades

Tendo em vista a definição dos coeficientes wavelet como erro de interpolação polinomial, estimativas análogas às da Seção 2.2 podem ser obtidas para o caso bidimensional. Portanto, os coeficientes wavelet $d_k^{(\alpha)\ell}$ podem também ser usados como indicadores da regularidade local de uma função $f(x, y)$.

3.2 Compressão de Dados: Redução de Malhas

Em princípio, a metodologia para compressão de dados do caso unidimensional se aplica também ao caso bidimensional. Ou seja, podemos tirar proveito da caracterização de regularidade local em termos de coeficientes wavelet para obter representações compactas de funções definidas no quadrado. No entanto, a topologia das malhas irregulares bidimensionais resultantes não é tão simples de ser tratada, podendo aumentar bastante a complexidade de armazenamento e de busca. Por isso, é preferível lidar com malhas que sejam localmente regulares, em blocos, como as tratadas a seguir.

Para a construção dessas malhas em blocos, utilizamos os conceitos de estrutura de árvores quaternárias. Introduzimos uma nomenclatura e algumas propriedades relativamente a este assunto.

Estrutura de Árvores

Sejam $\mathcal{X}^\ell$ malhas regulares diádicas bidimensionais em $I \times I$, conforme (3.1). Consideramos blocos de malhas regulares $\mathcal{B}^\ell_\mu \subset \mathcal{X}^\ell$, com $N_x \times N_y$ pontos, do tipo

$$\mathcal{B}^\ell_\mu = \left\{ \gamma = \mu + (kh^\ell_x, \ell h^\ell_y), 0 \leq k < N_x, 0 \leq \ell < N_y \right\}.$$

O ponto μ do extremo inferior esquerdo de $\mathcal{B}^\ell_\mu$ é chamado de *ponto diretor*, e ℓ de *nível de escala do bloco*. Por refinamento diádico e partição em quadrantes, o bloco $\mathcal{B}^\ell_\mu$ dá origem a quatro novos blocos disjuntos no nível $\ell + 1$

$$\mathcal{B}^\ell_\mu \to \mathcal{S}(\mathcal{B}^\ell_\mu) = \{\mathcal{B}^{\ell+1}_{\mu_{00}}, \mathcal{B}^{\ell+1}_{\mu_{01}}, \mathcal{B}^{\ell+1}_{\mu_{10}}, \mathcal{B}^{\ell+1}_{\mu_{11}}\}.$$

Os pontos diretores dos novos blocos são dados por $\mu_{00} = \mu$, $\mu_{0,1} = \mu + (0, \frac{N_y}{2}\ h^\ell_y)$, $\mu_{10} = \mu + (\frac{N_x}{2}\ h^\ell_x, 0)$, e $\mu_{11} = \mu + (\frac{N_x}{2}\ h^\ell_x, \frac{N_y}{2}\ h^\ell_y)$. Na terminologia de árvores quaternárias, os elementos do conjunto $\mathcal{S}(\mathcal{B}^\ell_\mu)$ são chamados de filhos do nó $\mathcal{B}^\ell_\mu$, que por sua vez é dito a mãe dos nós de $\mathcal{S}(\mathcal{B}^\ell_\mu)$, que são irmãos entre si. Adotamos a seguinte notação:

$$\mathcal{B}^\ell_\mu = \mathbb{M}(\mathcal{B}^{\ell+1}_{\mu_{pq}}) \qquad \mathcal{B}^\ell_{\mu_{pq}} = \mathbb{S}(\mathcal{B}^{\ell+1}_\mu) \qquad \mathcal{B}^{\ell+1}_{\mu_{pq}} = \mathbb{B}(\mathcal{B}^{\ell+1}_{\mu_{p'\,q'}})$$

Ilustramos esta geração na Figura 3.3.

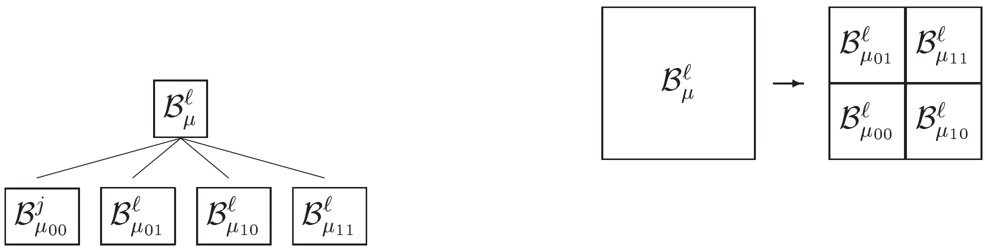

Figura 3.3: Ilustração de uma geração de blocos numa estrutura de árvore.

Considerando a raiz $\mathcal{B}^0_{(0,0)} = \mathcal{X}^0$, após j gerações temos uma árvore quaternária completa de $j+1$ níveis. Em cada nível $0 \leq \ell \leq j$ existem $2^{2\ell}$ blocos (nós), cujos pontos diretores integram um conjunto que denominamos $\mathcal{I}^\ell$. Apresentamos o diagrama de uma árvore quaternária completa de três níveis na Figura 3.4.

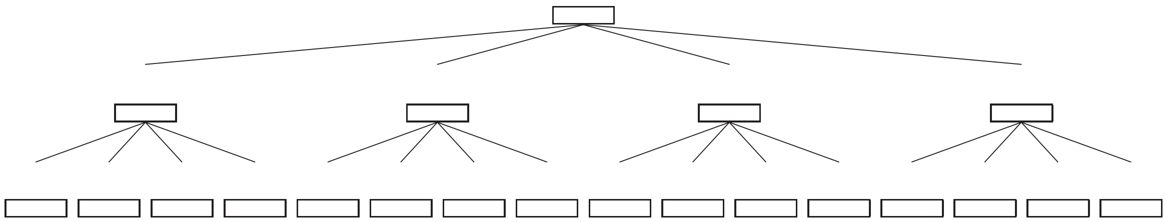

Figura 3.4: Ilustração de árvore quaternária completa com 3 níveis.

Numa árvore completa de $j+1$ níveis, as folhas são os blocos $\mathcal{B}^j_\mu$ do último nível, cuja união forma a malha regular mais fina. Isto é

$$\mathcal{X}^j = \bigcup_{\mu \in \mathcal{I}^j} \mathcal{B}^j_\mu.$$

Podemos ter também árvores quaternárias incompletas, em que é possível a presença de nós em níveis intermediários $1 \leq \ell < j$ que não tenham filhos. Isso nos leva ao conceito mais geral de folhas de uma árvore:

folhas são os nós que não possuem filhos.

Na Figura 3.5(a) apresentamos o diagrama de uma árvore incompleta com quatro níveis. Nesta árvore de blocos de malhas, as folhas ocorrem quando em algum bloco de um nível ℓ o processo de refinamento é interrompido. A união das folhas

$$\mathcal{M} = \bigcup \mathcal{F}(\mathcal{A}),$$

fornece uma malha $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}^j$ regular por blocos, mas com espaçamentos variáveis, como ilustrado na Figura 3.5(b). De fato, se $\Lambda^\ell \subset \mathcal{I}^\ell$ é o conjunto dos pontos diretores dos blocos folha do nível ℓ, então

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\ell=1}^{j} \bigcup_{\mu \in \Lambda^\ell} \mathcal{B}^\ell_\mu,$$

sendo esta uma união disjunta.

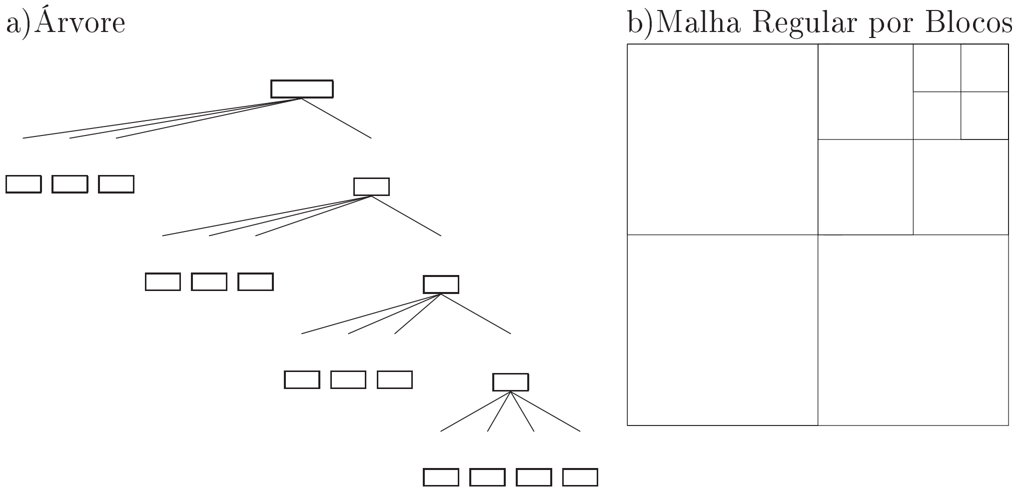

Figura 3.5: Ilustração de uma árvore quaternária não completa com 4 níveis e sua respectiva malha regular por blocos.

Malhas Adaptáveis Regulares por Blocos

Como no caso unidimensional, a idéia é permitir a representação de funções suaves, com irregularidades localizadas, de uma forma mais econômica em malhas localmente regulares por blocos. Os critérios utilizados na construção de tais malhas são apresentados a seguir.

Um ingrediente fundamental na criação de uma malha adaptável regular por blocos é um indicador $\imath_\epsilon(\mathcal{B})$ que testa se um determinado bloco será ou não refinado. Esse indicador é caracterizado por um esquema de multirresolução interpolante e por um parâmetro ϵ de truncamento dos coeficientes wavelet, escolhidos a priori.

Dado um bloco $\mathcal{B}^\ell_\mu$, seja $\bar{\mathcal{B}}^\ell_\mu$ o completamento de $\mathcal{B}^\ell_\mu$ pela inclusão de uma coluna adicional de pontos à direita e uma linha adicional acima. Isto é,

$$\bar{\mathcal{B}}^\ell_\mu = \left\{ \gamma = \mu + (kh^\ell_x, \ell h^\ell_y), 0 \leq k \leq N_x, 0 \leq \ell \leq N_y \right\}.$$

Consideramos as malhas retangulares $\mathcal{R}^\ell = \bar{\mathcal{B}}_\mu^\ell$ e o seu refinamento diádico $\mathcal{R}^{\ell+1}$

$$\mathcal{R}^{\ell+1} = \left\{ \gamma = \mu + (kh_x^{\ell+1}, \ell h_y^{\ell+1}), 0 \leq k \leq 2N_x, 0 \leq \ell \leq 2N_y \right\},$$

de tal forma que

$$\mathcal{R}^{\ell+1} = \overline{\bigcup \mathcal{B}_{\mu_{p,q}}^{\ell+1}}.$$

Aplicando a WT interpolante sobre os valores de uma função nos pontos de $\mathcal{R}^{\ell+1}$, obtemos os coeficientes wavelet $d_{k,l}^{(\alpha)\,\ell}$ associados aos pontos

$$\begin{aligned}
\gamma_{k,m}^{(1)\ell} &= \mu + (2kh_x^{\ell+1}, (2m+1)h_y^{\ell+1}), \\
\gamma_{k,m}^{(2)\ell} &= \mu + ((2k+1)h_x^{m+1}, 2mh_y^{\ell+1}), \\
\gamma_{k,m}^{(3)\ell} &= \mu + ((2k+1)h_x^{\ell+1}, (2m+1)h_y^{\ell+1}),
\end{aligned}$$

pertencentes a $\mathcal{R}^{\ell+1} \setminus \mathcal{R}^\ell$. Utilizamos a notação $\mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mu_{p,q}}^{\ell+1})$ para indicar o conjunto de todos os coeficientes wavelet associados a pontos de $\bar{\mathcal{B}}_{\mu_{p,q}}^{\ell+1}$. Se todos os coeficientes wavelet $d_{k,\ell}^{(\alpha)\,\ell} \in \mathcal{D}(\mathcal{B}_{\mu_{p,q}}^{\ell+1})$ tiverem módulo menor do que o valor de truncamento ϵ, então definimos $\imath_\epsilon(\mathcal{B}_{\mu_{p,q}}^{\ell+1}) = 0$. Caso contrário, definimos $\imath_\epsilon(\mathcal{B}_{\mu_{p,q}}^{\ell+1}) = 1$.

Iniciamos a construção da malha $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\epsilon$ a partir do bloco inicial $\mathcal{B} = \mathcal{X}^{j_0}$ e fazemos $\imath_\epsilon(\mathcal{B}) = 1$. A seguir, calculamos o indicador $\imath_\epsilon$ de seus filhos. Se o indicador for nulo em todos os quatro casos, então o bloco $\mathcal{B}$ é considerado folha e é integrado à malha $\mathcal{M}$. Caso contrário, apenas são considerados folha, e integrados à malha, aqueles blocos filhos com indicador nulo. Nos demais blocos, com indicador igual a um, repetimos o processo de teste até alcançar um nível em que todos os blocos são considerados folha. Na prática, no entanto, pode ser necessário antecipar a interrupção deste processo de construção devido a limitações físicas da máquina, em cujo caso, estabelece-se um número máximo de blocos presentes na malha. Esse procedimento é resumido nos Algoritmos 1 e 2.

Algorithm 1 Construção de Malhas Adaptáveis por Blocos: $Constr(\mathcal{B}, \mathcal{F}, \epsilon)$.

```
∀B_γ ∈ S(B)  do
if ı_ε(B_γ) = 0, ∀(B_γ) ∈ S(B) then
  F = F ⋃(B)
  return
else
  if ı_ε(B_γ) = 0, then
    F = F ⋃ (B_γ).
  else
    Apply: Constr(B_γ, F, ε).
  end if
end if
end do
```

Algorithm 2 Indicador de Refinamento: $\imath_\epsilon(\mathcal{B})$

```
ℓ = Level (B)-1.
if  |d_{k,m}^{(α) ℓ}| ≤ ε ∀ d_{k,m}^{(α) ℓ} ∈ D(B)  then
  return 0        (Não há coeficientes wavelet significativos)
else
  return 1        (Há coeficientes wavelet significativos)
end if
```

Exemplos Numéricos

Na Figura 3.6 apresentamos as curvas de nível e uma representação $3D$ da função tipo *pulso*

$$f(x, y) = 3\ \exp^{-2500\,((x-0.3)^2+(y-0.3)^2)} + sen(2\pi x) + sen(2\pi y)$$

cuja singularidade está localizada em torno do ponto $(0.3, 0.3)$.

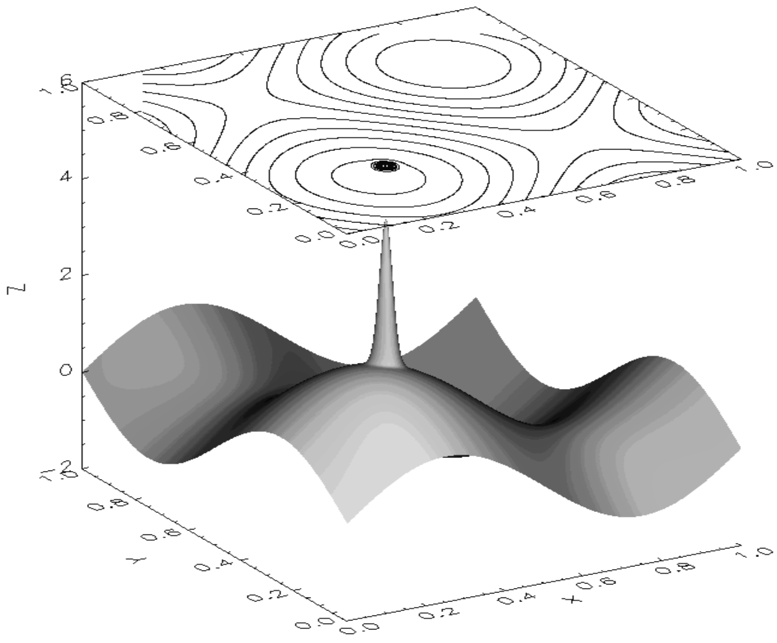

Figura 3.6: Representação da função tipo *pulso* utilizada.

As malhas $\mathcal{M}_\epsilon$ adaptáveis para essa $f(x, y)$, com $M = 4$ estão representadas na Figura 3.7. Os blocos utilizados possuem $N_x = N_y = 32$. Observamos nesta figura o posicionamento dos blocos mais refinados na vizinhança da singularidade a medida que ϵ diminui.

A Tabela 3.1 mostra a economia de pontos alcançada em cada representação adaptável, comparada com a representação em uma malha uniforme $\mathcal{X}^{\ell_{\max}}$ correspondente ao nível mais refinado atingido $\ell_{\max}$. Observamos que o número de blocos aumenta à medida que ϵ diminui. No entanto, a proporção $\sharp(\mathcal{M}_\epsilon)/\sharp(\mathcal{X}^{\ell_{\max}})$, entre o número de pontos utilizados nas malhas adaptáveis e o total de pontos da malha regular do nível mais refinado diminui drasticamente com a redução de ϵ.

a)$\mathcal{M}_{10^{-3}}$, 28 blocos b) $\mathcal{M}_{10^{-4}}$, 64 blocos c) $\mathcal{M}_{10^{-5}}$, 100 blocos

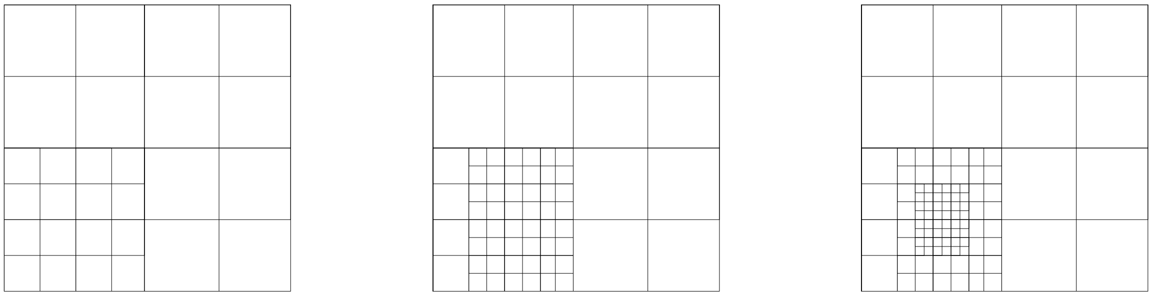

Figura 3.7: Representação de função tipo *pulso* em malhas $\mathcal{M}_\epsilon$ para $M = 4$.

Tabela 3.1: **Armazenagem em Malhas $\mathcal{M}_\epsilon$ (função *pulso*) .**

ϵ	Número de Blocos	$\sharp(\mathcal{M}_\epsilon)$	$\sharp(\mathcal{X}^{\ell_{\max}})$	$\sharp(\mathcal{M}_\epsilon)/\sharp(\mathcal{X}^{\ell_{\max}})$
10^{-5}	100	102400	2097152	0.05
10^{-4}	64	65536	262144	0.25
10^{-3}	28	28672	65536	0.43

Nas Figuras 3.8 e 3.9, e na Tabela 3.2 resultados semelhantes são apresentados para a função frente oblíqua

$$f(x, y) = 1 - tanh(25x + 5(y - 1)).$$

Observamos o posicionamento dos blocos mais refinados em torno da região de variação mais brusca da função. Comparando estes resultados com os do exemplo anterior, observamos que ocorre um melhor desempenho de armazenagem para estruturas pontualmente localizadas, como no caso do *pulso*. Observamos também que o nível máximo $\ell_{\max}$ da função *pulso* é maior que o alcançado na representação da frente oblíqua.

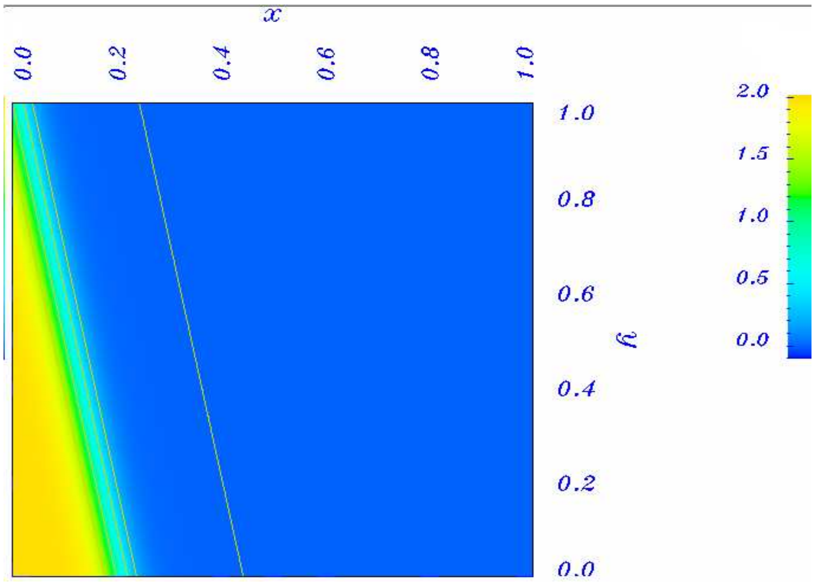

Figura 3.8: Frente-oblíqua — linhas de contorno.

a)$\mathcal{M}_{10^{-3}}$, com 10 blocos b) $\mathcal{M}_{10^{-4}}$, com 19 blocos c) $\mathcal{M}_{10^{-5}}$, com 44 blocos

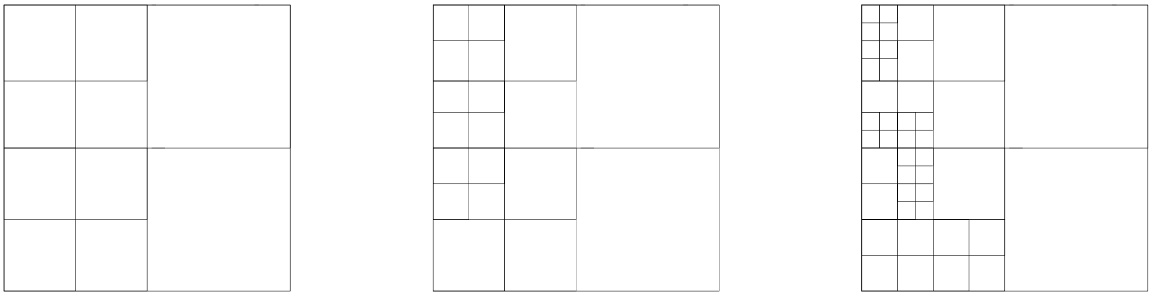

Figura 3.9: Representação de função frente oblíqua em malhas $\mathcal{M}_\epsilon$ para $M = 4$.

Tabela 3.2: **Armazenagem em Malhas $\mathcal{M}_\epsilon$ (frente oblíqua).**

ϵ	Número de Blocos	$\sharp(\mathcal{M}_\epsilon)$	$\sharp(\mathcal{X}^j)$	$\sharp(\mathcal{M}_\epsilon)/\sharp(\mathcal{X}^\ell)$
10^{-5}	44	45056	262144	0.17
10^{-4}	19	19456	65536	0.30
10^{-3}	10	10240	16384	0.60
10^{-2}	4	4096	4096	1.00

Apêndice A

Interpolação Polinomial

Neste Apêndice fazemos uma breve introdução ao problema de interpolação polinomial. Apresentamos um método para a construção do polinômio interpolador e uma estimativa de erro na interpolação polinomial de Lagrange. Os conceitos e os resultados aqui apresentados são fundamentais para a construção das análises de multirresolução interpolantes. Para um estudo mais detalhado deste assunto indicamos as referências ?), Hammerlin e Hoffman (1991).

A.1 O Problema de Interpolação Polinomial

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\mathcal{S}$ uma partição qualquer de $[a,b]$, isto é, $\mathcal{S} = \{\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{M-1}\}$ em que $\nu_0 = a$ e $\nu_{M-1} = b$. Queremos construir um polinômio p, de grau menor ou igual $M-1$, que satisfaça as seguintes condições de interpolação

$$p(\nu_i) = f(\nu_i), \quad i = 0, 1, \cdots, M-1. \tag{A.1}$$

Dizemos que p é o polinômio interpolador da função f nos pontos da partição $\mathcal{S}$.

A seguir, apresentamos um método para a construção de tal polinômio.

A.2 Interpolação de Lagrange

Seja $L_{\nu_i},\ i = 0, 1, \ldots, M-1$, polinômios de grau $M-1$ que satisfazem as seguintes condições

$$L_{\nu_i}(\nu_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Como L_{ν_i} é um polinômio de grau $M-1$, com $M-1$ raízes distintas nos pontos $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_i, \nu_{i+1}, \ldots, \nu_{M-1}$, podemos escrevê-lo como

$$L_{\nu_i}(x) = c_i(x-\nu_0)(x-\nu_1)\ldots(x-\nu_{i-1})(x-\nu_{i+1})\ldots(x-\nu_{M-1}).$$

Usando o fato que $L_{\nu_i}(\nu_i) = 1$ obtemos o valor da constante c_i,

$$c_i = \frac{1}{(\nu_i-\nu_0)(\nu_i-\nu_1)\ldots(\nu_i-\nu_{i-1})(\nu_i-\nu_{i+1})\ldots(\nu_i-\nu_{M-1})}.$$

Portanto,

$$L_{\nu_i}(x) = \frac{(x-\nu_0)(x-\nu_1)\ldots(x-\nu_{i-1})(x-\nu_{i+1})\ldots(x-\nu_{M-1})}{(\nu_i-\nu_0)(\nu_i-\nu_1)\ldots(\nu_i-\nu_{i-1})(\nu_i-\nu_{i+1})\ldots(\nu_i-\nu_{M-1})}.$$

Estes polinômios são chamados de polinômios de Lagrange. Pode-se mostrar que o conjunto $\{L_{\nu_0}, L_{\nu_1}, \ldots, L_{\nu_{M-1}}\}$ é uma base para espaço dos polinômios de grau menor ou igual a $M-1$. Logo, todo polinômio p deste espaço pode ser escrito como

$$p(x) = \alpha_0 L_{\nu_0}(x) + \alpha_1 L_{\nu_1}(x) + \cdots + \alpha_{M-1} L_{\nu_{M-1}}(x).$$

Como p deve satisfazer as condições de interpolação (A.1), temos que

$$\sum_{j=0}^{M-1} \alpha_j L_{\nu_j}(\nu_i) = f(\nu_i), \quad i = 0, 1, \ldots, M-1. \tag{A.2}$$

Como $L_{\nu_j}(\nu_i) = \delta_{ij}$, os coeficientes do polinômio interpolador de Lagrange são dados por

$$\alpha_i = f(\nu_i), \quad i = 0, 1, \ldots, M-1.$$

E, portanto, o polinômio interpolador de Lagrange tem a forma

$$p(x) = \sum_{j=0}^{M-1} f(\nu_j) L_{\nu_j}(x), \quad x \in [a, b]. \tag{A.3}$$

A.3 Erro na Interpolação Polinomial de Lagrange

Teorema A.1 *Seja $p(x)$ o polinômio de grau $M-1$ que interpola uma função f em M pontos $\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_{M-1}$. Se $f \in C^m[\nu_0, \nu_{M-1}]$, $0 \leq m \leq M-1$, e $f^{(m+1)}$ é integrável, então para cada x em $[\nu_0, \nu_{M-1}]$*

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{M!} \sum_{i=0}^{M-1} L_{\nu_i}(x) \int_{\nu_i}^{x} (\nu_i - t)^m f^{(m+1)}(t) dt. \tag{A.4}$$

□

A demonstração deste resultado pode ser encontrada em Hammerlin e Hoffman (1991).

Apêndice B

Aspecto Funcional da AMR–1D

Neste apêndice descrevemos o aspecto funcional associado à análise de multirresolução interpolante construída no capítulo 2.

Para que os conceitos fiquem mais claros, introduzimos aqui um exemplo simples.

B.1 Exemplo

Considera a análise de multirresolução interpolante linear, apresentada no exemplo do Capítulo 2. Seja

$$V^{j+1} = \{g \in C[0,1] : \ g \text{ é linear por partes em } X^{j+1}\}.$$

Consideramos o operador de reconstrução interpolante $I^{j+1}(x; f^{j+1})$ como sendo a função de V^{j+1} que coincide com f^{j+1} no pontos de X^{j+1}. Ou seja

$$I^{j+1}(x_k^{j+1}; f^{j+1}) = f_k^{j+1}, \quad k = 0, \cdots, 2^{j+1}.$$

Podemos então, escrever o operador de reconstrução interpolante como

$$I^{j+1}(x; f^{j+1}) = \sum_{k=0}^{2^{j+1}} f_k^{j+1} \phi_k^{j+1}(x),$$

em que $\{\phi_k^{j+1}(x),\ k=0,\cdots,2^{j+1}\}$ é a base do espaço V^{j+1} tal que $\phi_k^{j+1}(x_m^{j+1})=\delta_{km}$. Ou seja,

$$\phi_0^{j+1}=\begin{cases}0, & x\geq x_1^{j+1}\\ \\ (x_1^{j+1}-x)(x_1^{j+1}-x_0^{j+1})^{-1}, & x_0^{j+1}\leq x\leq x_1^{j+1},\end{cases}$$

$$\phi_k^{j+1}=\begin{cases}0, & x\leq x_{k-1}^{j+1} \text{ ou } x\geq x_{k+1}^{j+1}\\ \\ (x-x_{k-1}^{j+1})(x_k^{j+1}-x_{k-1}^{j+1})^{-1}, & x_{k-1}^{j+1}\leq x\leq x_k^{j+1},\\ \\ (x_{k+1}^{j+1}-x)(x_{k+1}^{j+1}-x_k^{j+1})^{-1}, & x_k^{j+1}\leq x\leq x_{k+1}^{j+1},\end{cases}$$

$$\phi_{2^{j+1}}^{j+1}=\begin{cases}(x-x_{2^{j+1}-1}^{j+1})(x_{2^{j+1}}^{j+1}-x_{2^{j+1}-1}^{j+1})^{-1}, & x\geq x_{2^{j+1}-1}^{j+1},\\ \\ 0, & x_0^{j+1}\leq x\leq x_{2^{j+1}-1}^{j+1}.\end{cases}$$

É fácil ver que $V^j\subset V^{j+1}$ e que vale a soma direta

$$V^{j+1}=V^j+W^j,$$

em que W^j é o conjunto das funções de V^{j+1} que se anulam em V^j. Desta forma, resulta que W^j é o espaço gerado pelas funções $\psi_k^j(x)=\phi_{2k-1}^{j+1}(x),\ k=1,\cdots,2^j$. Notemos que cada uma destas funções pode ser construída pelo refinamento da seqüência $\hat{f}^{j+1}$ obtida a partir da síntese de $f_m^j=0$ e $d_k^j=\delta_{m,k}$ em que $m=0,\cdots,2^j$. Desta forma, é fácil ver que podemos escrever

$$\sum_{k=0}^{2^{j+1}} f_k^{j+1}\phi_k^{j+1}(x)=\sum_{j=0}^{2^j} f_k^j\phi_k^j(x)+\sum_{k=1}^{2^j} d_k^j\psi_k^j(x). \tag{B.1}$$

Deste ponto de vista, as transformações WT e IWT são mudanças entre as bases $\{\phi_k^{j+1}\}$ e $\{\phi_k^j\}\cup\{\psi_k^j\}$. Na Figura B.1 ilustramos a relação de mudança de base (B.1) com $j=2$.

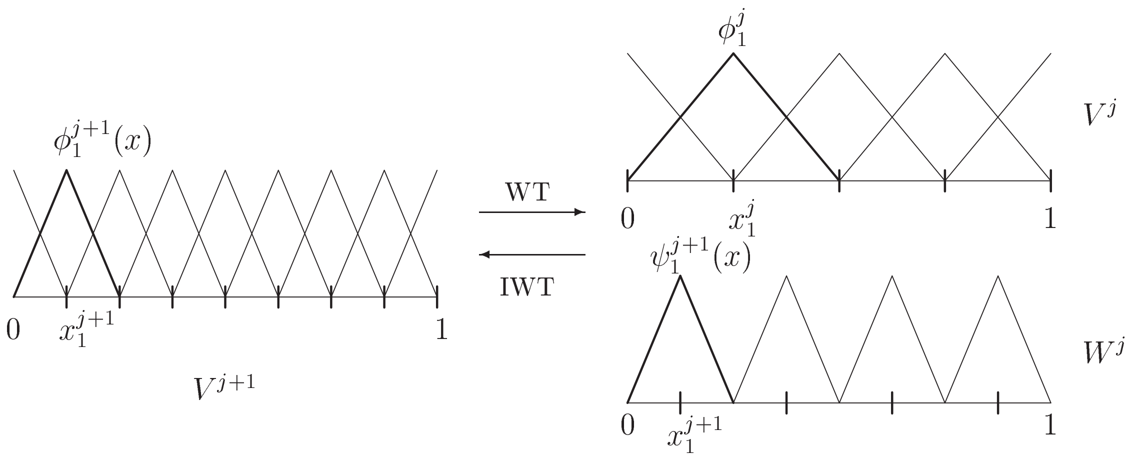

Figura B.1: Mudança de Base

De modo geral, se $j_0 < j$, iterando o processo descrito acima, obtemos a expressão em multinível

$$\sum_{k=0}^{2^{j+1}} f_k^{j+1}\phi_k^{j+1}(x) = \sum_{j=0}^{2^{j_0}} f_k^{j_0}\phi_k^{j_0}(x) + \sum_{l=j_0}^{j}\sum_{k=1}^{2^l} d_k^l \psi_k^l(x),$$

que corresponde à soma direta

$$V^{j+1} = V^{j_0} + W^{j_0} + \ldots + W^j.$$

Temos propriedades semelhantes para o caso da análise de multirresolução interpolante em que utilizamos a interpolação de grau $M-1$, conforme veremos a seguir.

B.2 Aspecto Funcional: Caso Geral

Considere uma análise de multiresolução definida a partir de um esquema de refinamento interpolante $P_\ell^{\ell+1}$ convergente, conforme a Definição 2.2 do Capítulo 2. Podemos então definir o espaço V^{j+1} formado pelas funções contínuas $I^{j+1}(x; f^{j+1})$ que interpolam f em X^{j+1}.

$$I^{j+1}(x_k^{j+1}; f^{j+1}) \;\; = \;\; f_k^{j+1}, \;\; \forall x_k^{j+1} \in X^{j+1}.$$

A definição deste operador interpolante $I^{j+1}(x; f^{j+1})$ é feita em duas etapas. A etapa inicial consiste na definição de $I^{j+1}(x_k^l; f^{j+1})$ para os diádicos $x_k^\ell, \ell \geq j+1$. Em uma segunda etapa definimos $I^{j+1}(x; f^{j+1})$ para os pontos não diádicos, por um processo limite.

Primeira Etapa

O principal ingrediente na definição de $I^{j+1}(x; f^{j+1})$ para x diádico é o operador de refinamento interpolante $P_\ell^{\ell+1}$, definido no Capítulo 2. Uma vez tendo em mãos o esquema de refinamento, passamos à definição de $I^{j+1}(x; f^{j+1})$ nos diádicos.

Definição B.1 *Dados os valores pontuais,* f_k^{j+1}, $k = 0, \cdots, 2^{j+1}$, *definimos*

1. *Para* $x_k^{j+1} \in X^{j+1}$
$$I^{j+1}(x_k^{j+1}; f^{j+1}) = s^{j+1}(k) = f_k^{j+1}.$$

2. *Para* $x_k^\ell \in X^\ell$, $\ell \geq j+2$,
$$I^{j+1}(x_k^\ell; f^{j+1}) = s^\ell(k) = [P_{\ell-1}^\ell s^{\ell-1}\ ](k).$$

Segunda Etapa

A definição de $I^{j+1}(x; f^{j+1})$ para x não diádico usa um processo de limite, tendo em vista a densidade dos pontos diádicos e a convegência do esquema de refinamento.

No caso de malhas diádicas da reta e de interpolação polinomial de Lagrange, sabe-se por Deslauries e Dubuc (1987, 1989), que o esquema de refinamento é convergente. Usando este fato, pode-se demonstrar que o refinamento interpolante no intervalo $P_\ell^{\ell+1}$ também é convergente (Kaibara (2000)).

Uma vez definidos os espaços de funções V^{j+1} e o operador de reconstrução interpolante $I^{j+1}(x; f^{j+1})$, estamos aptos a estabelecer as relações entre as informações entre o nível mais fino $j+1$ e as informações em multinível do ponto de vista funcional.

Para a caracterização do operador WT do ponto de vista funcional vamos primeiramente definir algumas funções em termos do operador de reconstrução.

Funções Escala

Definimos a função escala interpolante $\phi_k^\ell(x),\ k = 0, \cdots, 2^\ell$ por

$$\phi_k^\ell(x) = I^\ell(x; \delta_{km}), \quad m = 0, \cdots, 2^\ell$$

de tal forma que V^ℓ é o espaço gerado por $\phi_k^\ell(x),\ k = 0, \cdots, 2^\ell$.

Donoho (1992) provou que $\phi_k^\ell(x)$ possui as seguintes propriedades

1. *Interpolante*: $\phi_k^\ell(x_m^\ell) = \delta_{km}$.
2. *Regularidade*: a regularidade de ϕ_k^ℓ aumenta com M. Por exemplo, para $M = 4$, $\phi_k^\ell(x)$ é pelo menos C^1 e, para $M = 6$, $\phi_k^\ell(x)$ é pelo menos C^2.
3. *Relação de Escala*:

$$\phi_k^\ell(x) = \sum_{m=0}^{2^{\ell+1}} \phi_k^\ell(x_m^{\ell+1})\phi_m^{\ell+1}(x),$$

   em que $\phi_k^\ell(x_m^{\ell+1}) = \delta_{km}$ se $x_m^{\ell+1} \in X^\ell$ e $\phi_k^\ell(x_m^{\ell+1}) = c_{km}$ se $x_m^{\ell+1} \in X^{\ell+1} \setminus X^\ell$ em que c_{km} são os coeficientes em (2.4), (2.7) e (2.10).
4. *Simetria*: Para $(M-1)2^{-\ell} < x_k^\ell < 1 - (M-1)2^{-k}$, $\phi_k^\ell(x) = \tilde{\phi}_k^\ell(x)$ é simétrica em relação a reta $x = x_k^\ell$

$$\phi_k^\ell(x_k^\ell + x) = \phi_k^\ell(x_k^\ell - x).$$

5. *Suporte*: Seja $x_k^\ell \in X^\ell$.

   (a) Se $0 \leq x_k^\ell \leq (M-1)2^{-\ell}$, o suporte de $\phi_k^\ell(x)$ é igual a

$$[0, x_k^\ell + (M-1)2^{-\ell}].$$

(b) Se $(M-1)2^{-\ell} < x_k^\ell < 1-(M-1)2^{-\ell}$, o suporte de $\phi_k^\ell(x)$ é igual a

$$[x_k^\ell - (M-1)2^{-\ell}, x_k^\ell + (M-1)2^{-\ell}].$$

(c) Se $1-(M-1)2^{-\ell} \leq x_k^\ell \leq 1$, o suporte de $\phi_k^\ell(x)$ é igual a

$$[x_k^\ell - (M-1)2^{-\ell}, 1].$$

6. <u>*Reprodução de Polinômios*</u>: Os polinômios de grau menor ou igual a $M-1$ são reproduzidos por $\phi_k^\ell(x),\ k = 0, \cdots, 2^\ell$. Mais precisamente,

$$x^n = \sum_{k=0}^{2^\ell} (x_k^\ell)^n \phi_k^\ell(x),\ n = 0, 1, \ldots, M-1.$$

Funções Wavelet

Seja $x_{2k-1}^{\ell+1} \in X^{\ell+1} \setminus X^\ell$. A seqüência $\hat{f}^{\ell+1}$, obtida a partir da síntese de $f_m^\ell = 0$ e $d_m^\ell = \delta_{km}$ em que $m = 0, \cdots 2^\ell$, é exatamente igual à seqüência $\hat{f}^{\ell+1} = \delta_{(2k-1),n},\ n = 0, \cdots, 2^{\ell+1}$. Definimos a função wavelet por

$$\psi_k^\ell(x) = \phi_{2k-1}^{\ell+1}(x).$$

Definimos W^ℓ como o espaço gerado por $\psi_k^\ell(x),\ k = 0, \cdots 2^\ell$.

Caracterizemos o operador WT em termos das bases $\{\phi_k^{\ell+1} :\ k = 0, \cdots 2^{\ell+1}\}$ e $\{\phi_k^\ell :\ k = 0, \cdots 2^\ell\} \cup \{\psi_k^\ell :\ k = 0, \cdots 2^{\ell+1}\}$.

Dada uma função $f(x) \in V^{\ell+1}$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^{\ell+1}} f_k^{\ell+1} \phi_k^{\ell+1}(x),$$

consideremos a função $g(x) \in V^{\ell+1}$ definida por

$$g(x) = \sum_{k=0}^{2^\ell} f_k^\ell \phi_k^\ell(x) + \sum_{k=1}^{2^\ell} d_k^\ell \psi_k^\ell(x).$$

Vamos mostrar que $f(x) = g(x)$. Como ambas as funções estão em $V^{\ell+1}$ é suficiente mostrar que elas coincidem em $X^{\ell+1}$.

1. Para $x_k^\ell \in X^\ell$, $\psi_m^\ell(x_k^\ell) = 0$ para todo $m = 0, \cdots, 2^\ell$. Portanto,
$$g(x_k^\ell) = f_k^\ell = f_k^{\ell+1} = f(x_k^\ell).$$

2. Para $x_{2k-1}^{\ell+1} \in X^{\ell+1} \setminus X^\ell$, $\psi_m^\ell(x_{2k-1}^{\ell+1}) = \delta_{mk}$. Logo,
$$g(x_{2k-1}^{\ell+1}) = I^\ell(x_{2k-1}^{\ell+1}; f^\ell) + d_k^\ell = f_{2k-1}^{k+1} = f(x_{2k-1}^{\ell+1}).$$

Concluimos então que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathcal{I}$ e, logo vale a igualdade
$$\sum_{k=0}^{2^{\ell+1}} f_k^{\ell+1}\phi_k^{\ell+1}(x) = \sum_{k=0}^{2^\ell} f_k^\ell \phi_k^\ell(x) + \sum_{k=1}^{2^\ell} d_k^\ell \psi_k^\ell(x). \tag{B.2}$$

Ou seja, $V^{\ell+1}$ é soma direta dos espaços V^ℓ e W^ℓ

De modo geral, se $j_0 < j$, iterando a expressão (B.2) obtemos a expressão em multinível
$$\sum_{k=0}^{2^{j+1}} f_k^{j+1}\phi_k^{j+1}(x) = \sum_{j=0}^{2^{j_0}} f_k^{j_0}\phi_k^{j_0}(x) + \sum_{l=j_0}^{j}\sum_{k=1}^{2^l} d_k^l \psi_k^l(x),$$

que corresponde à soma direta
$$V^{j+1} = V^{j_0} + W^{j_0} + \ldots + W^j.$$

Deste ponto de vista, as transformações em multinível WT e IWT são mudanças entre a base de um nível e a base de multinível, e vice-versa, isto é,
$$\{\phi_k^{j+1}(x) : \ k = 0, \cdots, 2^{j+1}\} \leftrightarrow \{\phi_k^{j_0}(x) : \ k = 0, \cdots, 2^{j_0}\} \cup_{l=j_0}^{j} \{\psi_k^l(x) : \ k = 0, \cdots, 2^j\}.$$

Nas Figuras B.2, B.3, B.4 e B.5 plotamos as funções escala ϕ_μ^5 para $\mu = 1/2$ e $M = 2, \ 4, \ 6, \ 8$, respectivamente. Nas Figuras B.6, B.7, B.8 e B.9 plotamos as funções escala ϕ_μ^5, $\mu = 0, \ 1/2^5, \ 2/2^5, \ 3/2^5$ que interagem com o extremo inferior do intervalo, utilizando $M = 4$.

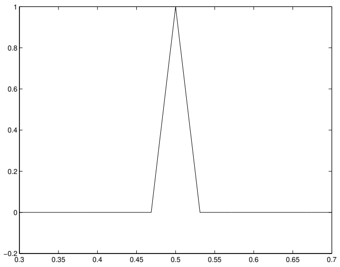

Figura B.2: ϕ^5_μ, $M = 2$

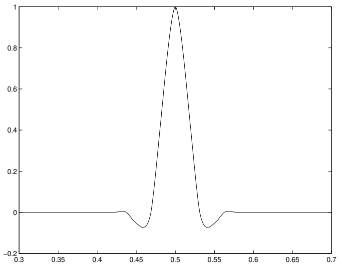

Figura B.3: ϕ^5_μ, $M = 4$

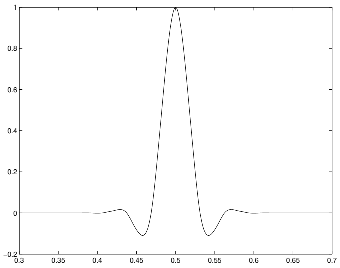

Figura B.4: ϕ^5_μ, $M = 6$

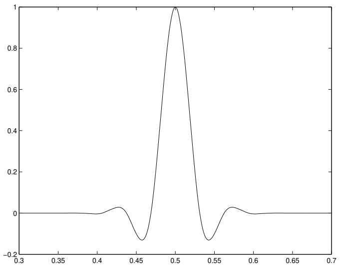

Figura B.5: ϕ^5_μ, $M = 8$

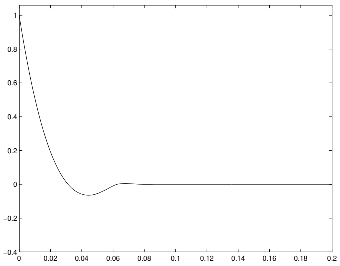

Figura B.6: ϕ^5_μ, $\mu = 0$

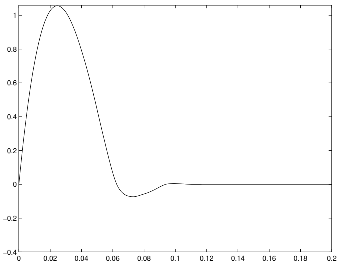

Figura B.7: ϕ^5_μ, $\mu = 1/2^5$

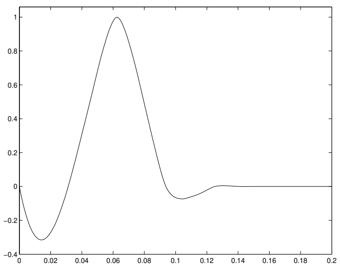

Figura B.8: ϕ^5_μ, $\mu = 2/2^5$

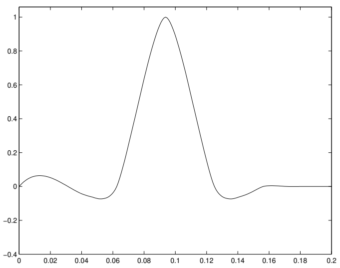

Figura B.9: ϕ^5_μ, $\mu = 3/2^5$

Bibliografia

Deslauries, G.; Dubuc, S. Interpolation dyadique. **Fractales, Dimensions non-entiẽres et Applications**. G. Cherbit (ed), Masson , Paris, 1987.

——. Symmetric iterative interpolation processes. **Constr. Approx.**, v. 5, p. 49–68, 1989.

Domingues, M. O. **Discretizações em bases wavelet e aplicações às equações de água rasa**. A ser apresentada. Tese – Universidade de Campinas, 2001.

Donoho, D. Interpolating wavelet transforms, 1992. Department of Statistics. Stanford University. October.

——. Smooth wavelet decomposition with blocky coefficient kernels. **Recent Advances in Wavelet Analysis**. L. L. Schumaker and G. Webb (eds.).Academic Press, Inc., 1993.

Hammerlin, G.; Hoffman, K. H. **Numerical Mathematics**. Spriger-Verlag, 1991. 422 p.

Harten, A. Discrete multiresolutions analysis and generalized wavelets. **Appl. Num. Math.**, v. 12, p. 153–192, 1993.

——. Multiresolution algorithms for the numerical solution of hyperbolic conservation laws. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 48, p. 1305–1342, 1995.

Holmströn, M. **Wavelet based methods for time dependent pdes**. Tese – University of Uppsala, 1997.

Kaibara, M. K. **Análise de multirresolução para leis de conservação em malhas adaptativas**. Tese – Universidade de Campinas, Abril 2000.