Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Tese de Doutorado

Aplicação do Conceito de Análise de Multirresolução Biortogonal na Solução Numérica de Equações Diferenciais

José Eduardo Castilho

Orientação: Sônia Maria Gomes

Setembro de 2001

Aplicação do Conceito de Análise de Multirresolução Biortogonal na Solução Numérica de Equações Diferenciais

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **José Eduardo Castilho** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de setembro de 2001

Profa. Dra. Sônia Maria Gomes
Orientadora

Comissão Julgadora:
Profa. Dra. Sônia Maria Gomes (Orientadora) IMECC-UNICAMP
Profa. Dra. Célia Aparecida Zorzo Barcelos FAMAT-UFU
Prof. Dr. Julio Cesar Ruiz Claeyssen IM-UFRGS
Prof. Dr. Nir Cohen IMECC-UNICAMP
Prof. Dr. Petronio Pulino IMECC-UNICANP

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Como requisito parcial para a obtenção do Título de DOUTOR em Matemática Aplicada.

À Tina

Por me fazer sentir uma pessoa especial.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer às diversas pessoas que de uma forma direta ou indireta contribuíram na realização deste trabalho.

Agradeço especialmente à Sônia, pela orientação sempre segura, dedicada e objetiva. E pela paciência quase materna com que se dedicou a minha pessoa.

Agradeço aos amigos, Magda, Maurílio e Margarete pelas palavras de incentivo nos momentos oportunos.

Agradeço ao Prof. Odelar, por ter orientado meus primeiros passos na vida acadêmica.

Agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro

Resumo

O objeto de estudo deste trabalho é a aplicação do conceito de multirresolução biortogonal na análise numérica de equações diferenciais. Em tal contexto, funções podem ser representadas tanto em um único nível de resolução quanto em multinível, em termos de bases de wavelets. É dada especial atenção a esquemas projetados para splines biortogonais.

Neste sentido, analisam-se diferentes esquemas de aproximação de funções. Além da projeção biortogonal usual, são considerados os operadores de interpolação, quase interpolação e projeção discreta, para os quais são apresentadas as estimativas de erro e a análise de uma eficiente implementação em multiescala.

A ênfase dada a estes três esquemas de aproximação se deve ao fato de que, ao contrário da projeção biortogonal, eles são definidos em termos de funcionais que são combinações de valores pontuais, o que é útil nas aplicações a problemas não lineares. Portanto, um dos assuntos importantes deste trabalho é a formulação de esquemas de discretização de operadores diferenciais definidos por intermédio de tais funcionais, resultando em esquemas híbridos. Para o caso específico do operador de advecção não linear, é feito um estudo do erro de truncamento, dando uma precisa descrição da interação dos diferentes modos de Fourier.

Para problemas de evolução, são analisados esquemas que combinam discretizações da variável espacial em termos das splines biortogonais com esquemas usuais de diferenças finitas na variável temporal. Para modelos lineares, é feita a análise clássica de consistência e estabilidade. É considerado também o modelo não linear da equação de Burger. Neste caso, é adotado o método de colocação associado a splines biortogonais, no domínio espacial, combinado com Crank Nicholson, na variável temporal. A análise da convergência baseia-se no estudo da consistência e na estabilidade do esquema aplicado ao problema linearizado.

Também é considerado um esquema adaptativo em multinível na variável temporal, proposto por Bacry, Mallat e Papanicolau [1]. A idéia é evoluir as diferentes componentes da representação em multirresolução da solução numérica usando um método explícito, adaptando o passo de tempo a cada nível de escala. Uma parte importante desta tese é referente ao estudo da estabilidade e consistência deste esquema quando aplicado a um modelo linear. Prova-se que são mantidas as mesmas condições de estabilidade e ordem de consistência válidas no esquema original, não adaptado.

Abstract

The object of study in this thesis is the application of the concept of biorthogonal multiresolution analysis to numerical approximation of differential equations.

In this direction, different approximation schemes are considered in the context of biorthogonal splines. Besides the usual biorthogonal projection, we shall also deal with interpolation , quasi-interpolation and discrete projection operators. Estimates for the approximation error are presented, and an efficient implementation in the multilevel setting is discussed.

The main motivation in the study of these three schemes is the fact that they are defined by functionals which can be expressed in terms of point evaluations. This property is useful in applications to nonlinear problems. Therefore, one of the main subjects of the present work is the formulation of hybrid schemes for discretization of differential operators by means of such functionals. We shall analyze the truncation error for the particular case of nonlinear advection operator, given a precise description of the interaction of different Fourier modes.

For evolution problems, we shall consider schemes that combine the discretization of spatial derivatives in terms of biorthogonal splines with usual finite differences in time. The classical analysis of consistency and stability is performed for a linear model. For the nonlinear Burger's equation, it is adopted a collocation scheme associated to biortogonal splines, in the spacial domain, and the Crank Nicholson scheme, in the time discretization. The convergence is obtained as a consequence of the consistency of the scheme combined with the stability of the method when applied to the linearized problem.

Another important topic in this thesis is the study of stability and consistency of an adaptive multilevel time discretization proposed by Bacry, Mallat and Papanicolau [1]. The main idea is to evolve the components in a multirressolution representation of the numerical solution by means of an explicit algorithm, adapting the time step according to each scale level. It is proved that the stability condition and consistency order are the same as in the original non-adapted scheme.

Sumário

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Lista de Algoritmos

Notações

Conjuntos

$\mathbb{C}$**:** Conjunto dos números complexos.

F_l**:** Conjunto de índices.

$\mathbb{N}$**:** Conjunto dos números naturais.

$\mathbb{R}$**:** Conjunto dos números reais.

X^j**:** Malhas.

$\mathbb{Z}$**:** Conjunto dos números inteiros.

Ω**:** Subconjunto de $\mathbb{R}$.

$\#\mathbf{c}$**:** Cardinalidade de um conjunto finito $\mathbf{c}$.

$\text{Supp}(\phi)$**:** Suporte da função ϕ.

$|\text{Supp}(\phi)|$**:** Tamanho do suporte da função ϕ.

Equivalência

Se $A(u)$ e $B(u)$ são funções positivas de um conjunto de parâmetros u, a notação

$$A(u) \lesssim B(u)$$

expressa que existe uma constante $C > 0$, independente dos parâmetros u, de tal forma que $A(u) \leq CB(u)$

Espaços

$\mathbf{C}^m(\mathbb{R})$: Espaço das funções m-vezes continuamente diferenciáveis.

E^j: Espaço vetorial discreto.

$\mathbf{H}^p(\mathbb{R})$: Espaço de Sobolev.

$\mathbf{L}^p(\mathbb{R})$: Espaço de Lebesgue.

ℓ^p: Espaço das seqüências p-somáveis.

$\mathbb{P}_n$: Espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n.

V_j: Espaço de aproximação gerado por $\phi_{j,k}$ na escala 2^{-j}.

V_j^*: Espaço de aproximação gerado por $\phi_{j,k}^*$ na escala 2^{-j}.

W_j: Espaço de aproximação gerado por $\psi_{j,k}$ na escala 2^{-j}.

W_j^*: Espaço de aproximação gerado por $\psi_{j,k}^*$ na escala 2^{-j}.

Filtros e Símbolos

$H(\xi)$: Filtro da função de escalonamento ϕ.

$H^*(\xi)$: Filtro da função de escalonamento dual ϕ^*.

$h(k)$: Coeficientes do filtro H.

$h^*(k)$: Coeficientes do filtro H^*.

$G(\xi)$: Filtro da função wavelet ψ.

$G^*(\xi)$: Filtro da função wavelet dual ψ^*.

$g(k)$: Coeficientes do filtro G.

$g^*(k)$: Coeficientes do filtro G^*.

$\widehat{\mathcal{K}}(\xi)$: Fator de aplificação associado ao esquema de aproximação.

$\Lambda(\xi)$: Símbolo do erro de truncamento dos operadores diferenciais no espaço de Fourier.

$\widetilde{\beta}^{(m)}(\xi)$: Símbolo associado aos valores da m-ésima derivada de ϕ nos inteiros.

$\widetilde{\gamma}(\xi)$: Símbolo associado aos coeficientes do operador de discretização $\mathcal{D}_c^j$.

$\widetilde{\phi}_\alpha(\xi)$: Símbolo associado aos valores de ϕ nos pontos da forma $k+\alpha$.

$\widetilde{\psi}(\xi)$**:** Símbolo associado aos valores de ψ nos inteiros.

μ_H^k**:** Momento discreto do filtro H.

Funções

B_{N^*}**:** Funções B-spline de ordem N^*.

f, q, u, v**:** Funções de variáveis reais.

$\widehat{f}(\xi)$**:** Transformada de Fourier da função f.

$\overline{f(x)}$**:** Conjugada complexa da função f.

$\delta(x)$**:** Delta de Dirac.

$\phi_{j,k}$**:** Funções de escalonamento na escala 2^{-j}.

$\phi_{j,k}^*$**:** Funções de escalonamento duais na escala 2^{-j}.

$\psi_{j,k}$**:** Funções wavelet na escala 2^{-j}.

$\psi_{j,k}^*$**:** Funções wavelet duais na escala 2^{-j}.

$\theta_{j,k}$**:** Funções de escalonamento interpoladoras na escala 2^{-j}.

$\lfloor \cdot \rfloor$**:** Parte inteira de um número real.

$\| \cdot \|$**:** Norma em geral.

$\| \cdot \|_{\mathbf{L}^p}$**:** $\mathbf{L}^p$-norma.

$\| \cdot \|_j$**:** Norma discreta.

Coeficientes

$\mathbf{c}^j, \mathbf{u}^j$**:** Coeficientes de escalonamento no nível j.

$\mathbf{d}^j$**:** Coeficientes wavelet no nível j.

$\mathbf{c}_{ME}^j, \mathbf{u}_{ME}^j$**:** Coeficientes em multinível.

$\beta(k)^{(m)}$**:** Valores da m-ésima derivada da função de escalonamento, nos inteiros.

$\vartheta(k)^{(m)}$**:** Valores da m-ésima derivada da função wavelet, nos inteiros.

$\mathcal{M}_\phi^k$**:** k-ésimo momento da função ϕ.

δ_k**:** Delta de Kronecker.

$\gamma(k)$**:** Coeficientes do operador de discretização $\mathcal{D}_c$.

Operações

$\langle f, q \rangle$: Produto interno das funções $f(x)$ e $q(x)$.

$*$: Convolução de duas funções ou seqüências.

$\oplus$: Soma direta de espaços.

Operadores

$\mathcal{D}^j, \mathcal{G}^j$: Operadores de discretização no nível j.

$\mathcal{D}_c^j, \mathcal{G}_c^j$: Operadores de discretização no nível j, baseados em valores pontuais.

$\mathcal{R}^j, \mathcal{I}^j$: Operadores de reconstrução.

$\mathcal{L}$: Operador diferencial.

$\mathcal{L}^j$: Discretização do operador $\mathcal{L}$ na escala 2^{-j}.

$\mathcal{P}^j$: Projeções em V_j.

$\mathcal{Q}^j$: Projeção em W_j.

Índices e Variáveis

J, j, k, l, m, n, p, s: Números inteiros.

M, N, N^*: Números naturais.

$t, x, y, w, z, \eta, \zeta$: Variáveis reais.

$i = \sqrt{-1}$.

Siglas

AMr: Análise de multirresolução.

AMrB: Análise de multirresolução biortogonal.

CSF: Condição de Strang-Fix.

TDF: Transformada discreta de Fourier.

TDIF: Transformada discreta inversa de Fourier.

Capítulo 1

Introdução

A Análise Wavelet pode ser considerada como uma síntese de resultados de diversos tópicos que foram objeto de estudo, por várias décadas, em diferentes áreas da Engenharia (*subband coding*), da Física (*coherent states*) e da Matemática (análise de operadores de Calderón-Zygmund). Ela surgiu na década de 80 e seus resultados pioneiros foram publicados em Daubechies [16] e Meyer [31].

O rápido avanço da teoria wavelet se deve, basicamente, à sua origem interdisciplinar, que tem seduzido pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento, e à forma simples e versátil com que certos conceitos são abordados, de forma unificada, no contexto de wavelets. Isto tem possibilitado diversas aplicações em análise de sinais, estatística, processamento de imagens, análise numérica, etc.

Em análise numérica, as wavelets têm sido aplicadas no desenvolvimento de técnicas numéricas para a resolução de equações diferenciais (ver [10] e referências indicadas). Um dos princípios desses esquemas é o uso da estrutura de multirresolução das bases wavelets no precondicionamento da discretização de problemas elípticos. Outro tipo de aplicação está relacionado com métodos adaptáveis para problemas de evolução com soluções singulares.

Sob o ponto de vista funcional, uma análise de multirresolução corresponde a uma seqüência hierárquica de subespaços aproximantes $V_{j-1} \subset V_j$, em que o nível de resolução j está associado à escala de aproximação. Um aspecto fundamental é a possibilidade de representações em soma direta

$$V_j = V_J \oplus W_J \oplus \cdots \oplus W_{j-1},$$

em que $J < j$ são inteiros. Os espaços W_ℓ contêm a diferença de informação entre dois níveis consecutivos

$$V_{\ell+1} = V_\ell \oplus W_\ell.$$

Ou seja, em W_ℓ estão os *detalhes* das funções de $V_{\ell+1}$ que não podem ser representados no nível inferior V_ℓ. Para funções $f \in V_j$, trabalham-se com dois tipos de representação. Por um lado, está a representação em um único nível

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c^j(k)\phi_{j,k}(x),$$

em termos de funções básicas $\phi_{j,k}(x) \in V_j$, chamadas funções de escalonamento. Por outro lado, estão representações em multinível

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c^J(k)\phi_{J,k}(x) + \sum_{\ell=J}^{j-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d^\ell(k)\psi_{\ell,k}(x),$$

em que $\psi_{\ell,k}(x)$ são bases de W_ℓ, chamadas de wavelets.

Como exemplo, sejam os espaços V_j formados pelas funções contínuas e lineares por partes numa malha regular, com espaçamento 2^{-j}. A base nodal é a das B-splines lineares $\phi_{j,k}(x)$ correspondentes aos pontos x_k^j da malha. Na Figura 1-(a) é apresentada a aproximação de $f(x)$ no espaço V_3, denotada por $\mathcal{P}^3 f$, e a base nodal $\{\phi_{3,k}\}$ na Figura 1-(b). Em multinível, as bases dos espaços complementares W_ℓ são formadas pelas funções $\psi_{\ell,k}(x) = \phi_{\ell+1,2k+1}(x)$, ou seja, pelas B-splines do nível $\ell+1$ correspondentes aos pontos novos $x_{2k+1}^{\ell+1}$. A Figura 1-(c) representa a aproximação $\mathcal{P}^2 f$ e o detalhe $\mathcal{Q}^2 f$ pertencente a W_2. Os detalhes podem ser interpretados como as componentes de alta freqüência da aproximação, que apresentam amplitude significativa em regiões de singularidades. A base hierárquica de V_3, dada por $\{\phi_{2,k}\} \cup \{\psi_{2,k}\}$, é apresentada na Figura 1-(d), em que as funções da base são plotadas na cor correspondente da função que estas geram (Figura 1-(c)).

Os algoritmos relacionando os coeficientes $\mathbf{c}^j$, do nível mais refinado j, e os coeficientes em multiescala

$$\mathbf{c}_{ME}^j = \{\mathbf{c}^J, \mathbf{d}^J, \mathbf{d}^{J+1}, \ldots, \mathbf{d}^{j-2}, \mathbf{d}^{j-1}\}$$

são eficientes (rápidos, estáveis e de complexidade linear).

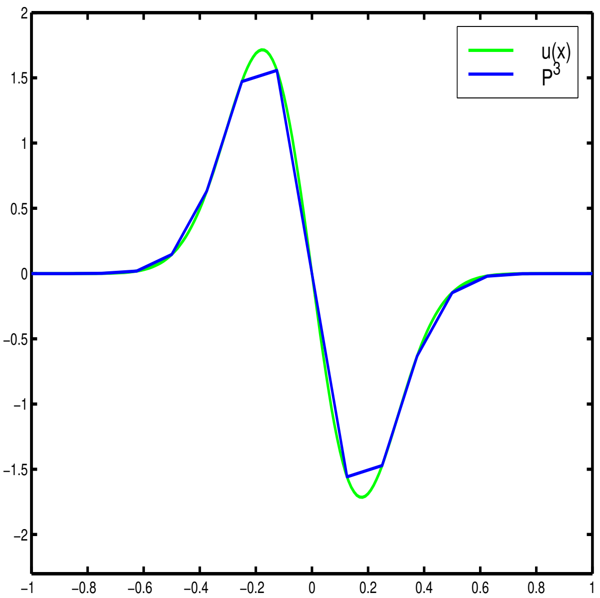
Os coeficientes wavelets $d^\ell(k)$ podem ser interpretados como erro entre aproximações de f nos níveis ℓ e $\ell+1$, localmente, em torno da posição $(2k+1)2^{\ell+1}$. Tipicamente, são pequenos em regiões de suavidade e significativos nas regiões em que a função apresenta singularidades. Ou seja, podem ser utilizados como indicadores de regularidade local. Por esta razão, expansões truncadas $f_\epsilon(x)$ contendo apenas as contribuições das wavelets correspondentes aos coeficientes significativos

$$|d^\ell(k)| > \epsilon,$$

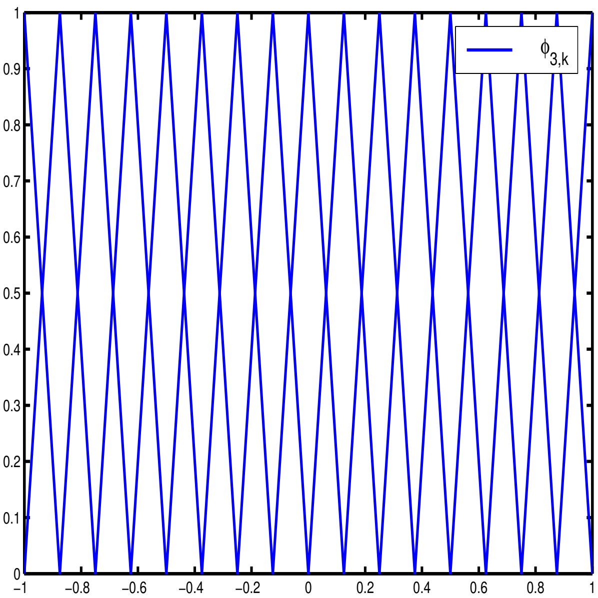
surgem, freqüentemente, nas aplicações.

Este tipo de *compressão de dados* dá origem a esquemas adaptativos para equações diferenciais com soluções irregulares. A simples idéia do truncamento conduz, naturalmente, a um refinamento local na vizinhança de uma singularidade. No entanto, ocorrem algumas dificuldades na implementação deste tipo de estratégia. Uma delas está associada ao cálculo de operadores diferenciais aplicados a este tipo de representação *lacunar* de wavelets, principalmente de operadores não lineares. Outra dificuldade surge na evolução temporal por intermédio de esquemas explícitos, em que, por questões de estabilidade, o passo de tempo está atrelado à menor escala presente na solução numérica. Neste sentido, o estudo desta tese considera dois tipos de propostas para atacar estes possíveis problemas. A saber,

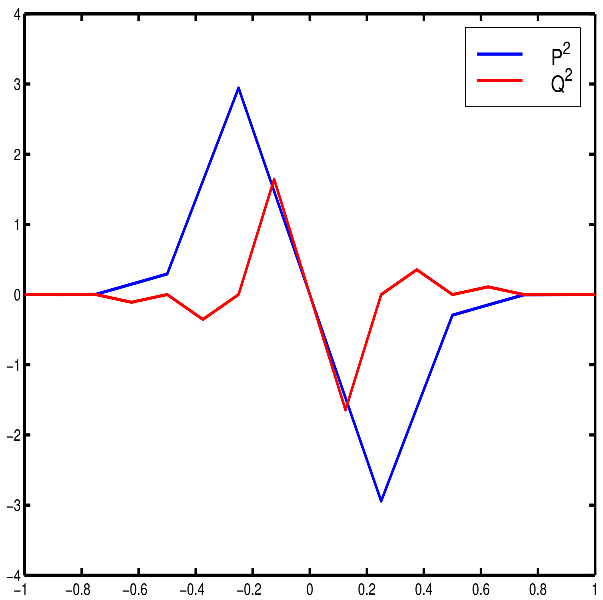
- Esquemas do tipo *pseudo-wavelet*, em que os operadores não lineares são calculados por funcionais definidos em termos de combinações de deltas de Dirac (valores pontuais).



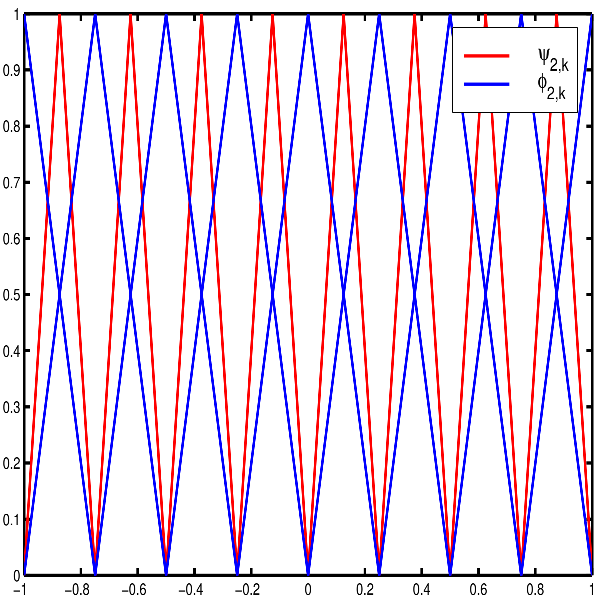
(a)-$u(x)$ e a aproximação $\mathcal{P}^3u$



(b)- Base nodal de V_3



(c)- Aproximação $\mathcal{P}^2u$ e o detalhe $\mathcal{Q}^2u$



(d)- Base hierárquica de V_3

Figura 1.1: Decomposição em multiescala

- Esquema de discretização temporal adaptativo em multinível, em que o passo de tempo para a evolução de cada componente é ajustado de acordo com o nível de escala correspondente.

Metodologia

Para a análise dos esquemas de aproximação abordados neste trabalho, é útil a utilização do formalismo adotado por A. Harten em [24]. Os valores discretos $\mathbf{c}^j$, que fornecem informações locais da função f no nível j, podem ser pensados como o resultado da aplicação de um operador de discretização $\mathcal{D}^j f$, em que

$$\mathcal{D}^j : V \to E^j,$$

associa a cada função $f \in V$, um vetor de valores discretos $\mathbf{c}^j \in E^j$. Por outro lado, está o operador de reconstrução $\mathcal{R}^j$ que fornece uma aproximação de f a partir de seus valores discretos

$$\mathcal{R}^j : X^j \to V_j \subset V.$$

O par de operadores $\{\mathcal{D}^j, \mathcal{R}^j\}$ define o esquema de aproximação.

Em Análise Wavelet, são típicos os operadores de discretização e reconstrução da forma

$$(\mathcal{D}^j f)(k) = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi^*_{j,k}(x)dx, \quad \mathcal{R}^j(x; \mathbf{c}^j) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c^j(k)\phi_{j,k}(x). \tag{1.1}$$

Analogamente, as representações em multiescala também podem ser formuladas por um esquema de aproximação $\{\mathcal{D}^j_{ME}, \mathcal{R}^j_{ME}\}$ definido em termos de bases hierárquicas de wavelets.

Um esquema de aproximação $\{\mathcal{D}^j, \mathcal{R}^j\}$ pode ser utilizado para definir discretizações $\mathcal{L}^j$ de operadores $\mathcal{L}$ da seguinte maneira

$$(\mathcal{L}^j c^j)(s) = \mathcal{D}^j[\mathcal{L}\mathcal{R}^j(\cdot; c^j)](s). \tag{1.2}$$

Se o operador de restrição é definido como os valores pontuais, $c^j(k) = f(x^j_k)$, então o esquema resultante é do tipo colocação. Por outro lado, se o operador de restrição é definido como em (1.1), o esquema é do tipo Petrov-Galerkin tendo $\phi^*_{j,k}$ como *funções teste* e $\phi_{j,k}$ como *funções trial*. Esquemas de Galerkin correspondem aos casos em que $\phi^*_{j,k} = \phi_{j,k}$.

Nos exemplos apresentados, especial atenção é dada às análises de multirresolução das splines biortogonais em $\mathbb{R}$ ou com periodicidade. Cabe ser observado que o estudo apresentado na presente tese ainda não contempla o caso de esquemas combinados com adaptabilidade espacial. Por isto, foi possível utilizar, extensivamente, técnicas de Fourier nas análises de consistência e estabilidade. Esquemas com adaptabilidade espacial serão objeto de futuras investigações, para as quais são requeridas ferramentas mais sofisticadas da teoria de aproximação não linear, como indicado em [10].

Proposta da Tese

A contribuição deste trabalho enquadra-se na área de aplicações do conceito de multirresolução biortogonal na análise numérica de equações diferenciais, investigando os tópicos descritos a seguir.

- **Esquemas de Aproximação em Multirresolução**

No contexto de análise de multirresolução biortogonal, analisam-se vários esquemas de aproximação em que o operador de reconstrução é combinado com diferentes esquemas de discretização. São de interesse discretizações $\mathcal{D}_c^j$, definidas em termos de valores pontuais, pela combinação de distribuições do tipo delta de Dirac. Investigam-se estimativas de erro e algumas variações da implementação numérica em multinível.

- **Discretização de Operadores**

Para operadores diferenciais $\mathcal{L}$, consideram-se discretizações híbridas da forma

$$\mathcal{L}(f) \sim \mathcal{L}^j(c^j) = \mathcal{D}_c^j \left[\mathcal{L}(\mathcal{R}^j(\cdot; \mathbf{c}^j)) \right],$$

que diferem da forma usual por permitir o uso de dois tipos diferentes de discretizações $\mathcal{D}_c^j \neq \mathcal{D}^j$, em que $\mathbf{c}^j = \mathcal{D}^j f$. Estas formulações híbridas são de especial interesse no caso de operadores não lineares, em que na parte não linear do operador $\mathcal{L}$ pode-se aplicar discretizações baseadas em valores pontuais. Investigam-se questões relacionadas com a consistência em termos do comportamento do erro de truncamento

$$\mathcal{D}^j \mathcal{L} f - \mathcal{L}^j \mathcal{D}^j f.$$

- **Esquemas Adaptativos no Tempo**

Consideram-se problemas de evolução

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathcal{L} u(t,x),$$

com condições de contorno periódicas. Em esquemas do tipo Petrov-Galerkin, a discretização do operador diferencial $\mathcal{L}^j$, em um único nível, se comporta como um esquema de diferenças finitas sobre os coeficientes $\mathbf{c}^j$. Tipicamente, a condição de estabilidade do esquema depende de uma relação entre o passo na discretização temporal Δ_t e o passo $\Delta_x = 2^{-j}$ da discretização da variável espacial. Isto pode ser uma restrição severa sobre o passo Δ_t, se for permitido a presença de escalas muito refinadas na solução numérica. Com a representação em multinível pode-se pensar em usar diferentes passos de tempo para a evolução temporal das diferentes componentes de escala. Neste sentido, considera-se um esquema adaptativo proposto em [1] e prova-se que é mantida a mesma condição de estabilidade válida no esquema não adaptado correspondente.

Organização dos Capítulos

No Capítulo 2 são introduzidas algumas definições e convenções adotadas neste trabalho. São apresentados os conceitos básicos de Análise Wavelet que são necessários para o entendimento do restante da tese. No contexto da análise de multirresolução, são apresentadas as propriedades fundamentais das bases wavelets biortogonais. Também é apresentado um resumo de diferentes famílias de wavelets associadas com as B-splines.

O Capítulo 3 é dedicado à análise de esquemas de aproximação. São apresentados quatro tipos de esquemas que diferem um do outro pela forma com que os operadores de discretização são definidos. Considera-se o caso da projeção biortogonal, em que a discretização é definida em termos de uma função dual $\phi^*(x)$. Também são apresentadas discretizações definidas pela combinação de distribuições do tipo delta Dirac, sendo estas, a interpolação, a quase interpolação e a projeção discreta. São apresentadas estimativas de erro e é feita a análise de uma implementação alternativa, proposta por Fröhlich e Schneider [20] para a interpolação e explorada por Ware [35] para a projeção discreta, de tais esquemas em multiescala.

No Capítulo 4 é feita a análise do erro de truncamento na discretização de operadores diferenciais, no caso linear e não linear. Usando os conceitos dos operadores de discretização e reconstrução, é descrito um esquema geral que une as várias estratégias. No contexto das wavelets biortogonais, é dada uma precisa descrição da interação entre diferentes modos de Fourier.

O enfoque do Capítulo 5 é sobre esquemas de aproximação para problemas de evolução. A análise clássica da estabilidade e da consistência é apresentada para problemas lineares. O objetivo é aplicar esta metodologia no estudo de uma estratégia de aproximação em multinível, proposta em [1], adaptável no tempo. O caso de interesse é a análise da estabilidade e consistência do esquema adaptativo, definido no contexto de wavelets biortogonais.

No Capítulo 6 esquemas do tipo colocação associados aos esquemas de interpolação definidos pelas wavelets biortogonais são aplicados à equação de Burger. A consistência e convergência de tais esquemas são analisadas.

Para melhor compreensão dos tópicos abordados, foram acrescentados alguns apêndices No Apêndice A são apresentados alguns resultados para matrizes circulantes necessários na análise dos problemas apresentados no Capítulo 5. O Apêndice B apresenta a estrutura do fator de amplificação para o esquema adaptativo, apresentado no Capítulo 5. No Apêndice C mostra-se sob que condições a solução de um sistema não linear converge para uma solução localmente única. Estes resultados são aplicados ao problema do Capítulo 6.

Contribuições Originais

- Capítulo 3 - O detalhamento dos esquemas de quase interpolação e projeção discreta, para as splines biortogonais, incluindo as estimativas dos erros de discretização e reconstrução (Corolário 3.1). A verificação das condições requeridas para a definição dos esquemas de projeção discreta, que não foram abordadas em [35]. A importância da propriedade de conservação dos esquemas de aproximação, sem a qual os algoritmos de análise e síntese modificados não apresentam bom desempenho (Seção 3.4.3). Estes resultados integram, parcialmente, o artigo [5].

- Capítulo 4 - Todos os resultados do capítulo, os quais tratam da análise do erro de truncamento na discretização de operadores diferenciais lineares e não lineares, usando as formulações híbridas baseadas nas splines biortogonais (Teorema 4.3). A determinação das constantes assintóticas do erro quando o esquema é aplicado ao modos de Fourier. Os resultados integram, parcialmente, os artigos [3] e [4].

- Capítulo 5 - Detalhamento da análise de consistência e estabilidade para esquemas biortogonais (Seção 5.3). A análise da estabilidade e consistência do esquema adaptativo, proposto em [1], quando aplicado aos esquemas biortogonais (Teorema 5.7). Parte destes resultados foram apresentados no XXIII CNMAC.

- Capítulo 6 - A análise da consistência e convergência do método de colocação, associado aos esquemas de interpolação definidos pelas splines biortogonais, aplicados à equação de Burger (Teorema 6.5).

Capítulo 2

Análise Wavelet

Neste capítulo são introduzidos, de forma resumida, alguns elementos básicos da análise de Fourier e de análise funcional, necessários para a compreensão deste trabalho. Em seguida são apresentados os conceitos básicos da análise wavelet no contexto da análise de multirresolução. Este material representa uma visão geral dos resultados teóricos que estão envolvidos na análise numérica dos esquemas wavelets.

Esquemas em multiescala são baseados na aproximação de dados de um problema em vários níveis de resolução. Neste sentido, é apresentado um resumo de diferentes decomposições em multiescala, baseadas nas B-splines, dando destaque à projeção biortogonal. Os resultados sobre a teoria wavelet, aqui apresentados, podem ser encontrados com mais detalhes no trabalho de Cohen [10], que consiste de uma extensa exposição sobre os aspectos de análise wavelet em análise numérica. Por se tratar de conceitos básicos, muitas das demostrações são omitidas. No entanto, alguns resultados considerados relevantes são destacados.

2.1 Preliminares

Neste trabalho todas as funções f são definidas na reta $\mathbb{R}$. Uma função f pertence ao espaço de Lebesgue $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}), 1 \leq p < \infty$ se

$$\|f\|_{\mathbf{L}^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

e ao espaço $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ se

$$\|f\|_{\mathbf{L}^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty.$$

Cada espaço de Lebesgue é um espaço de Banach e o espaço $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert, onde o produto interno entre duas funções f e q é definido por

$$\langle f, q \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{q(x)} dx.$$

Uma seqüência é uma função definida nos inteiros e denotada por $\{x_k\}$, em que $x_k \in \mathbb{C}$. A seqüência $\{x_k\}$ pertence ao espaço das seqüências p-somáveis, ℓ^p, se

$$\|\mathbf{x}\|_{\ell^p}^p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^p < \infty.$$

O conjunto de funções $\{\phi_k\}$ de um espaço de Hilbert é uma base de Riesz se todo elemento do espaço pode ser escrito de forma única como $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(k)\phi_k$ e se existem constantes positivas A e B, tal que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c(k)|^2 \leq B\|f\|^2.$$

Uma base de Riesz é uma base ortogonal se as funções ϕ_k são mutuamente ortogonais. Neste caso, $A = B = 1$.

O espaço $\mathbf{C}^k$ é o espaço das funções k-vezes continuamente diferenciáveis e aqui são consideradas as derivadas no sentido clássico. Também considera-se a seguinte definição e notação para os espaços de Sobolev,

$$\mathbf{H}^s(\mathbb{R}) = \left\{ f; \frac{d^s f}{dx^s} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}) \right\},$$

em que se define a norma

$$\|f\|_{\mathbf{H}^s} = \left(\sum_{k=0}^{s} \left\| \frac{d^k f}{dx^k} \right\|_{\mathbf{L}^2} \right)^{1/2}.$$

2.1.1 Conceitos Básicos da Análise de Fourier

Definição 2.1 *A transformada de Fourier $\widehat{f}$ de uma função $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ é definida por*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Algumas propriedades básicas são resumidas no seguinte teorema (ver Chui [7] pag. 25).

Teorema 2.1 *Seja $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, então a transformada de Fourier $\widehat{f}$ satisfaz:*

(i) $\widehat{f} \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ *com* $\|\widehat{f}\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq \|\widehat{f}\|_{\mathbf{L}^1}$.

(ii) $\widehat{f}$ *é uniformemente contínua em* $\mathbb{R}$.

(iii) $\widehat{f}(\xi) \to 0$ *quando* $\xi \to \pm\infty$.

(vi) Se existe a derivada de f e esta pertence a $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, então

$$\widehat{\frac{df}{dx}}(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi).$$

Apesar da propriedade (iii) ser válida para toda $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, não significa que $\widehat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$. Se $\widehat{f} \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$, então f pode ser obtida pela transformada inversa de Fourier, sendo que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\widehat{f}(\xi)d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, então a transformada de Fourier $\widehat{f} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ e satisfaz a chamada identidade de Plancherel

$$\|\widehat{f}\|^2_{\mathbf{L}^2} = 2\pi\|f\|^2_{\mathbf{L}^2}.$$

Sejam as funções $f, q \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$. A convolução de f e q é uma função em $\mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ definida por

$$(f * q)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)q(x-y)dy.$$

Se $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ e $q \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R})$, então $f * q \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R})$ e satisfaz as propriedades:

$$\|f * q\|_{\mathbf{L}^p} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^1}\|q\|_{\mathbf{L}^p}.$$

Para $f, q \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R})$ a transformada de Fourier da convolução de f e q satisfaz

$$\widehat{(f * q)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{q}(\xi).$$

No caso em que f e $\widehat{f}$ apresentam decaimento rápido, isto é, para algum $\alpha > 1$,

$$f(x), \widehat{f}(x) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{1+|x|^\alpha}\right),$$

é válida a fórmula do somatório de Poisson [25, 8]

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-ina}f(x+nb) = \frac{1}{|b|}\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2\pi m + a}{b}\right)e^{ix(2\pi m+a)/b},$$

em que $a, b, x \in \mathbb{R}$, com $b \neq 0$.

Seja $\{u(k)\}$, uma seqüência N-periódica, isto é, $u(k) = u(k+N)$. A Transformada Discreta de Fourier (*TDF*) de $\{u(k)\}$ é definida por

$$\hat{u}(k) = \sum_{s=0}^{N-1} u(s)e^{-iks2\pi/N},$$

e a Transformada Discreta Inversa de Fourier (TDIF), definida por

$$u(k) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} \hat{u}(s) e^{iks2\pi/N}.$$

Vale a relação de Parseval

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |u(k)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{u}(k)|^2 = \frac{1}{N} \|\hat{\mathbf{u}}\|^2.$$

Sejam $\{u(k)\}$ e $\{v(k)\}$ duas seqüências N-periódicas. A convolução discreta entre $\{u(k)\}$ e $\{v(k)\}$ é uma seqüência N-periódica definida por

$$(u * v)(k) = \sum_{s=0}^{N-1} u(s) v(k-s).$$

Vale o teorema de convoluções

$$\widehat{(u * v)}(k) = \widehat{u}(k) \widehat{v}(k).$$

Dada uma seqüência $\{u(k)\} \in \ell^2$ define-se o símbolo

$$\tilde{u}(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(k) e^{-ik\xi}.$$

Também usa-se a notação $U(\xi)$ para representar $\tilde{u}(\xi)$ e

$$\tilde{u}_P(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(2k) e^{-ik\xi} \quad \text{e} \quad \tilde{u}_I(\xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(2k+1) e^{-ik\xi}$$

para os símbolos formados pelos termos de índices pares e de índices ímpares de u.

Sejam $\{u(k)\}$ e $\{v(k)\}$ duas seqüências pertencentes a ℓ^2. Neste caso a convolução discreta entre u e v é definida pela seqüência

$$(u * v)(k) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} u(s) v(k-s),$$

em que vale o teorema de convoluções

$$\widetilde{(u * v)}(\xi) = \widetilde{u}(\xi) \widetilde{v}(\xi).$$

2.2 Análise de Multirresolução - AMr

Um dos conceitos mais importante em análise wavelet é o de análise de multirresolução que foi formulado por Meyer [31] e Mallat [28]. A estrutura de uma análise de multirresolução proporciona um ambiente natural para entendimento das bases wavelets.

Definição 2.2 *Uma análise de multirresolução (AMr) de* $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ *é definida pela seqüência de subespaços fechados* $V_j \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ *tal que:*

(M1) $V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$

(M2) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}).$

(M3) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}.$

(M4) $\forall j \in \mathbb{Z}, \quad f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}.$

(M5) *Existe uma função* $\phi \in V_0$ *tal que* $\{\phi(\cdot - k);\ k \in \mathbb{Z}\}$ *é uma base de Riesz de* V_0*.*

A função ϕ é chamada de função de escalonamento. Neste trabalho, consideram-se somente casos em que ϕ é uma função contínua com suporte compacto.

Por intermédio das propriedades (M1) e (M4) segue que existe uma seqüência $\{h(k)\} \in \ell^2$, tal que

$$\phi(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)\phi(2x-k). \tag{2.1}$$

Esta relação é chamada de relação de escalonamento. Aplicando a transformada de Fourier em (2.1) obtém-se

$$\widehat{\phi}(\xi) = H(\xi/2)\widehat{\phi}(\xi/2), \tag{2.2}$$

em que H é uma função 2π-periódica, chamada de filtro H e definida por

$$H(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)e^{-ik\xi}. \tag{2.3}$$

Na terminologia de análise de sinais, $h(k)$ representa a resposta ao impulso, enquanto que $H(\xi)$ representa a resposta à freqüência.

Os coeficientes $h(k)$ do filtro devem satisfazer certas condições gerais para garantir a existência da função de escalonamento (ver Daubechies [16]). A unicidade é garantida pela equação de normalização

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = 1,$$

que implica em

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k) = 1.$$

No espaço de Fourier, a propriedade (M5) é equivalente a

$$C_1 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\phi}(\xi - 2k\pi)\right|^2 \leq C_2.$$

Quando $C_1 = C_2 = 1$, segue que $\{\phi(\cdot - k);\ k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal de V_0 (ver Cohen [10] Theorem 2.1.1).

Definindo $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)$, resulta que $\{\phi_{j,k};\ k \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base de Riesz para os espaços V_j. A condição (M2) garante que para $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$

$$\lim_{j\to\infty} \|\mathcal{P}^j f - f\|_{\mathbf{L}^2} = 0,$$

em que $\mathcal{P}^j f$ é a projeção ortogonal sobre V_j. Isto implica que a base $\{\phi(\cdot - k);\ k \in \mathbb{Z}\}$ forma uma partição da unidade (ver Cohen [10] Theorem 2.2.3), isto é

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(x-k) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Usando a fórmula do somatório de Poisson, prova-se que a partição da unidade é equivalente a (ver Conhen Theorem. 2.2.3)

$$\widehat{\phi}(2\pi k) = \delta_k,\ \ k \in \mathbb{Z}. \tag{2.5}$$

Seja W_j um espaço que complementa V_j em relação a V_{j+1}. Isto é, vale a soma direta

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \tag{2.6}$$

Desta forma, resulta que

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j = \mathbf{L}^2(\mathbb{R}). \tag{2.7}$$

Uma função ψ é chamada de função wavelet se o conjunto $\{\psi(\cdot - k);\ k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base de Riesz de W_0. Como conseqüência, de (2.7) segue que $\{\psi_{j,k};\ k, j \in \mathbb{Z}\}$ é uma base de Riesz de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, em que $\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$. Como a função $\psi \in W_0 \subset V_1$, existe uma seqüência $\{g(k)\} \in \ell^2$ tal que

$$\psi(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(k)\phi(2x-k). \tag{2.8}$$

Aplicando a transformada de Fourier obtém-se que

$$\widehat{\psi}(\xi) = G(\xi/2)\widehat{\phi}(\xi/2),$$

em que G é o filtro associado a função ψ definido por

$$G(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g(k)e^{-ik\xi}. \tag{2.9}$$

Existem várias maneiras de se construir espaços complementares W_j. Uma delas é tomando W_j como o complemento ortogonal de V_j em relação a V_{j+1}. Se $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$

for uma base ortonormal de V_0, define-se a função wavelet tomando $g(k) = (-1)^k h(1-k)$ na equação (2.8). Com isto, $\psi_{j,k}(x)$ forma uma base ortonormal de W_j.

Uma outra forma de se construir espaços complementares W_j ocorre com as chamadas wavelets interpoladoras. Suponha que a função de escalonamento seja uma função interpoladora. Ou seja, existe $\alpha \in [0,1)$ tal que

$$\phi(k+\alpha) = \delta_k.$$

Em termos da transformada de Fourier, esta condição é equivalente a que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(k+\alpha)e^{-ik\xi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\alpha(\xi+2k\pi)}\widehat{\phi}(\xi+2k\pi) \equiv 1.$$

Desta forma, prova-se que $\psi(x) = 2\phi(2x-1)$ e as funções $\psi_{j,k}(x)$ geram espaços complementares W_j de V_j em V_{j+1} (ver Donoho [19]).

As condições de ortogonalidade e de interpolação podem ser restritivas, como por exemplo, implicando em filtros H e G com infinitos coeficientes não nulos ou com falta de simetria. Neste sentido, o método baseado em análise de multirresolução biortogonal, descrito a seguir, permite maior flexibilidade na construção de bases wavelets.

2.2.1 Análise de Multirresolução Biortogonal - *AMrB*

Sejam duas seqüências de subespaços $\{V_j\}$ e $\{V_j^*\}$ de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$, satisfazendo as propriedades (M1)-(M5) de uma *AMr* , com suas respectivas funções de escalonamento ϕ e ϕ^* que satisfazem relações de escalonamento

$$\phi(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)\phi(2x-k), \tag{2.10}$$

$$\phi^*(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} h^*(k)\phi^*(2x-k). \tag{2.11}$$

Os espaços $\{V_j\}$ e $\{V_j^*\}$ formam uma análise de multirresolução biortogonal (*AMrB*) de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ se suas funções de escalonamento satisfazem a relação de biortogonalidade

$$\langle \phi, \phi^*(\cdot - k)\rangle = \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.12}$$

Espaços W_j e W_j^* são definidos como os complementares de V_j em V_{j+1} e de V_j^* em V_{j+1}^*, respectivamente, de tal forma que

$$V_j^* \perp W_j \quad \text{e} \quad V_j \perp W_j^*, \tag{2.13}$$

e conseqüentemente

$$W_j^* \perp W_l \quad \text{para } j \neq l.$$

Sendo

$$g^*(k) = (-1)^{k+1}h(1-k) \quad \text{e} \quad g(k) = (-1)^{k+1}h^*(1-k),$$

as funções

$$\psi(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} g(k)\phi(2x-k) \quad \text{e} \quad \psi^*(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} g^*(k)\phi^*(2x-k),$$

geram bases de Riesz para W_j e W_j^*. Valem as seguintes relações de biortogonalidade

$$\langle \psi, \psi^*(\cdot - k)\rangle = \delta_k, \tag{2.14}$$

$$\langle \phi^*, \psi(\cdot - l)\rangle = \langle \psi^*, \phi(\cdot - l)\rangle = 0. \tag{2.15}$$

Usando a fórmula do somatório de Poisson, as relações (2.12), (2.14) e (2.15) podem ser expressas como

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}^*(\xi + 2k\pi)\overline{\widehat{\phi}(\xi + 2k\pi)} & = & 1, \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi^*}(\xi + 2k\pi)\overline{\widehat{\psi}(\xi + 2k\pi)} & = & 1, \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi^*}(\xi + 2k\pi)\overline{\widehat{\phi}(\xi + 2k\pi)} & = & 0, \\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}^*(\xi + 2k\pi)\overline{\widehat{\psi}(\xi + 2k\pi)} & = & 0. \end{array} \right. \tag{2.16}$$

Sejam H^* e G^* os filtros da análise de multirresolução $\{V_j^*\}$, de tal forma que

$$G(\xi) = e^{-i\xi}\overline{H^*(\xi+\pi)} \quad \text{e} \quad G^*(\xi) = e^{-i\xi}\overline{H(\xi+\pi)}. \tag{2.17}$$

Em termos dos filtros, as relações de biortogonalidade podem ser escritas como

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{array}{rcl} H^*(\xi)\overline{H(\xi)} + H^*(\xi+\pi)\overline{H(\xi+\pi)} & = & 1, \\ G^*(\xi)\overline{G(\xi)} + G^*(\xi+\pi)\overline{G(\xi+\pi)} & = & 1, \\ G^*(\xi)\overline{H(\xi)} + G^*(\xi+\pi)\overline{H(\xi+\pi)} & = & 0, \\ H^*(\xi)\overline{G(\xi)} + H^*(\xi+\pi)\overline{G(\xi+\pi)} & = & 0. \end{array} \right. \tag{2.18}$$

Wavelets ortogonais ocorrem como caso particular das wavelets biortogonais quando $\psi = \psi^*$. A condição de ortogonalidade é uma forte limitação. Por exemplo, com exceção da base de Haar, wavelets simétricas não podem ser ortogonais e terem suporte compacto ao mesmo tempo [16].

O momento k da função de escalonamento e da função wavelet são definidos por:

$$\mathcal{M}_\phi^k = \int_{\mathbb{R}} x^k \phi(x)dx \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_\psi^k = \int_{\mathbb{R}} x^k \psi(x)dx.$$

De forma similar para as funções duais tem-se a definição de $\mathcal{M}_{\phi^*}^k$ e $\mathcal{M}_{\psi^*}^k$. As funções de escalonamento são normalizadas de tal forma que $\mathcal{M}_\phi^0 = \mathcal{M}_{\phi^*}^0 = 1$. Das equações (2.2) e (2.5) prova-se que $H(\pi) = 0$. Logo, por intermédio de (2.17) segue que $G^*(0) = 0$ e conseqüentemente $\mathcal{M}_{\psi^*}^0 = 0$. Conseqüentemente a wavelet dual tem necessariamente integral nula sobre $\mathbb{R}$.

2.3 Transformada Wavelet Discreta

No contexto de análise de multirresolução biortogonal, pode-se obter uma aproximação de uma dada função $f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ em V_j pela projeção

$$f_j(x) = (\mathcal{P}^j f)(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c^j(k)\phi_{j,k}(x),$$

em que $c^j(k) = \langle f, \phi^*_{j,k}\rangle$. Isto é, $\mathcal{P}^j$ é a projeção de f em V_j paralela a $V_j^{*\perp}$.

Desde que $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$, toda função de V_j pode ser decomposta, de forma única, como a soma de uma função de V_{j-1} com uma função W_{j-1}. Em particular,

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}^j f)(x) &= (\mathcal{P}^{j-1} f)(x) + (\mathcal{Q}^{j-1} f)(x)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c^{j-1}(k)\phi_{j-1,k}(x) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} d^{j-1}(k)\psi_{j-1,k}(x), \end{aligned} \tag{2.19}$$

em que os coeficientes $d^j(k) = \langle f, \psi^*_{j,k}\rangle$ são chamados de coeficientes wavelet. O operador $\mathcal{Q}^j f$ representa a projeção de f em W_j paralela a $W_j^{*\perp}$. Em outras palavras $f_j(x)$ pode ser representada de duas formas, uma na base $\{\phi_{j,k};\ k \in \mathbb{Z}\}$ associada a seqüência $\{c^j(k)\}$ e outra na base $\{\phi_{j-1,k}, \psi_{j-1,k};\ k \in \mathbb{Z}\}$ associada a seqüência $\{c^{j-1}(k)\} \cup \{d^{j-1}(k)\}$.

Usando as relações de escalas, este procedimento de mudança de base pode ser expresso pela a seguinte relação

$$\begin{aligned}c^{j-1}(k) &= \langle f_j, \phi^*_{j-1,k}\rangle\\ &= 2\langle f_j, \sum_{s\in\mathbb{Z}} h^*(s-2k)\phi^*_{j,s}\rangle\\ &= 2\sum_{s\in\mathbb{Z}} h^*(s-2k)c^j(s). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ou seja, os coeficientes $c^{j-1}(k)$ do nível $j-1$ são obtidos por convolução dos coeficientes $h^*(k)$ com os coeficientes $c^j(k)$ do nível j, seguido de decimação por fator 2. De forma similar os coeficientes wavelets do nível $j-1$ podem ser obtidos por

$$d^{j-1}(k) = 2\sum_{s\in\mathbb{Z}} g^*(s-2k)c^j(s). \tag{2.21}$$

Por outro lado, por intermédio da equação (2.19,) o processo inverso é obtido, isto é

$$\begin{aligned}c^j(k) &= \langle f, \phi^*_{j,k}\rangle\\ &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} h(k-2s)\langle f, \phi^*_{j-1,s}\rangle + \sum_{s\in\mathbb{Z}} g(k-2s)\langle f, \psi^*_{j-1,s}\rangle\\ &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} h(k-2s)c^{j-1}(s) + \sum_{s\in\mathbb{Z}} g(k-2s)d^{j-1}(s). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Algoritmo 2.1 Análise

Require: $\mathbf{c}^j = \{c^j(k),\ k \in \mathbb{Z}\}$

  for $l = j : (-1) : J$ **do**

    $c^{l-1}(k) \leftarrow 2 \sum_{s\in\mathbb{Z}} h^*(s-2k)c^l(s)$

    $d^{l-1}(k) \leftarrow 2 \sum_{s\in\mathbb{Z}} g^*(s-2k)c^l(s)$

  end for

Ensure: $\mathbf{c}^j_{ME} = \{\mathbf{c}^J, \mathbf{d}^J, \mathbf{d}^{J+1}, \ldots, \mathbf{d}^{j-2}, \mathbf{d}^{j-1}\}$.

Algoritmo 2.2 Síntese

Require: $\mathbf{c}^j_{ME} = \{\mathbf{c}^J, \mathbf{d}^J, \mathbf{d}^{J+1}, \ldots, \mathbf{d}^{j-2}, \mathbf{d}^{j-1}\}$.

  for $l = J+1 : 1 : j$ **do**

    $c^l(k) \leftarrow \sum_{s\in\mathbb{Z}} h(k-2s)c^{l-1}(s) + \sum_{s\in\mathbb{Z}} g(k-2s)d^{l-1}(s)$

  end for

Ensure: $\mathbf{c}^j = \{c^j(k),\ k \in \mathbb{Z}\}$

Aplicando recursivamente as equações (2.20) e (2.21) tem-se a chamada Transformada Wavelet Discreta, também chamada de Análise, esquematizada pelo Algoritmo 2.1.

Aplicando recursivamente a equação (2.22) tem-se a Transformada Wavelet Discreta Inversa, também chamado de Síntese, esquematizada pelo Algoritmo 2.2

Estas transformações possibilitam uma representação em multiescala da função f. Tendo os dados $\{\mathbf{c}^j\}$, que fornece informações da função no nível de escala j, pode-se obter as informações em multiescala $\mathbf{c}^j_{ME} = \{\mathbf{c}^J, \mathbf{d}^J, \mathbf{d}^{J+1}, \ldots, \mathbf{d}^{j-2}, \mathbf{d}^{j-1}\}$. Por outro lado, dada a representação em multiescala $\mathbf{c}^j_{ME}$, pode-se recuperar os dados $\{\mathbf{c}^j\}$. A eficiência destes algoritmos se deve pelas seguintes propriedades:

- Não se aumenta a quantidade de dados: $\#\mathbf{c}^j = \#\mathbf{c}^j_{ME}$
- Invertibilidade: as informações em um nível podem ser recuperadas por intermédio da representação em multiescala.
- Complexidade Linear: ambos algoritmos requerem um número de operações da ordem de $\#\mathbf{c}^j$.
- Estabilidade: pequenas perturbações nos dados não são amplificadas pelas transformações.

Nota 2.1 *A estrutura de multirresolução apresentada nesta seção permite aproximar funções que estejam definidas sobre a reta* $\mathbb{R}$. *Várias estratégias têm sido propostas com o objetivo de se construir espaços de aproximação* V_j^Ω *e* W_j^Ω *que gerem uma análise de multirresolução em domínios limitados* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *[11, 15, 29, 30]. Os principais objetivos dessas estratégias* *são: A construção de uma base local com uma estrutura simples, satisfazendo estabilidade, suavidade e reprodução de polinômios; A construção de uma base dual permitindo projeções locais $\mathcal{P}^j$ e rápidos algoritmos de Análise e Síntese.*

Nota 2.2 *Para funções de $\mathbf{L}^2[0,1]$, que sejam 1-periódicas, é fácil construir uma análise de multirresolução (ver Daubechies [16]). A estratégia é construir bases 1-periódicas por intermédio das bases $\phi_{j,k}(x)$. Se $f(x)$ é uma função 1-periódica tal que*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c^j(k)\phi(2^j x - k),$$

então os coeficientes $c^j(k)$ são 2^j-periódicos, isto é, $c^j(k) = c^j(k+2^j)$. Desta forma, a função $f(x)$ também pode ser representada por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^j-1} c^j(k)\phi_{j,k}^{per}, (x)$$

em que

$$\phi_{j,k}^{per}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi(2^j x + 2^j k).$$

O mesmo processo é aplicado à função wavelet ψ, obtendo as bases

$$\psi_{j,k}^{per}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(2^j x + 2^j k).$$

Os espaços gerados por estas funções

$$V_j^{per} = \overline{\operatorname{span}\{\phi_{j,k}^{per};\ k\in\mathbb{Z}\}} \quad e\ W_j^{per} = \overline{\operatorname{span}\{\psi_{j,k}^{per};\ k\in\mathbb{Z}\}},$$

satisfazem $V_{j+1}^{per} = V_j^{per} \oplus W_j^{per}$ e definem uma análise de multirresolução.

2.4 Reprodução de Polinômios: Condição de Strang-Fix

A ordem de precisão de um esquema de aproximação é usualmente caracterizada pela capacidade deste reproduzir polinômios. No caso específico de malha regular, aproximações em termos das transladadas de uma função básica, são caracterizadas pela condição de Strang-Fix [34].

Definição 2.3 *Seja p um inteiro não negativo. Uma função ϕ satisfaz a Condição de Strang-Fix (CSF) de ordem p se*

(i) $\widehat{\phi}(0) \neq 0$.

(ii) $\widehat{\phi}(\xi)$ *tem zeros de ordem* $p+1$ *nos pontos* $\xi = 2k\pi$, $0 \neq k \in \mathbb{Z}$.

A ordem da *CSF* de uma função ϕ representa o maior grau dos polinômios que são exatamente gerados pelas funções $\{\phi(\cdot - k);\, k \in \mathbb{Z}\}$, como mostra o próximo teorema (ver Cohen [10] pag. 112).

Teorema 2.2 *Seja* $\phi(x)$ *uma função integrável e de suporte compacto. As seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) $\phi(x)$ *satisfaz a CSF com ordem* p.

(ii) Para $n = 0, \ldots, p$ *o polinômio* x^n *pode ser expandido por*

$$x^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} [k^n + q_{n-1}(k)]\phi(x-k),$$

em que q_{n-1} *é um polinômio de grau* $n-1$.

Como conseqüência, pode-se obter a ordem de aproximação dos espaços V_j.

Teorema 2.3 *Se as funções de escalonamento* ϕ *e* ϕ^* *forem funções integráveis de suporte compacto, e se* ϕ *satisfizer a CSF de ordem* p*, então para* $f \in \mathbf{H}^{p+1}$ *a precisão da projeção biortogonal em* V_j *é dada por*

$$\|f - \mathcal{P}^j f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} \lesssim 2^{-j(p+1)} \|f\|_{\mathbf{H}^{p+1}(\mathbb{R})}. \tag{2.23}$$

Prova: Considera-se os intervalos diádicos $I_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$ e considera-se um polinômio $q_{j,k} \in \mathbb{P}_{p+1}$, tal que

$$\|f - q_{j,k}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_l)} \leq 2 \inf_{q \in \mathbb{P}_{p+1}} \|f - q\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_l)} \lesssim 2^{-j(p+1)} \|f\|_{\mathbf{H}^{p+1}(\Omega_l)}, \tag{2.24}$$

em que $\Omega_l = \cup_{k \in F_l} \mathrm{Supp}(\phi^*_{j,k})$, com $F_l = \{k \in \mathbb{Z};\, \mathrm{Supp}(\phi_{j,k}) \cap I_{j,l} \neq \emptyset\}$. Estimando o erro local obtém-se

$$\begin{aligned}
\|f - \mathcal{P}^j f\|_{\mathbf{L}^2(I_{j,k})} &\leq \|f - q_{j,k}\|_{\mathbf{L}^2(I_{j,k})} + \|\mathcal{P}^j f - q_{j,k}\|_{\mathbf{L}^2(I_{j,k})} \\
&= \|f - q_{j,k}\|_{\mathbf{L}^2(I_{j,k})} + \|\mathcal{P}^j (f - q_{j,k})\|_{\mathbf{L}^2(I_{j,k})} \\
&\lesssim \|f - q_{j,k}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_l)} \\
&\lesssim 2^{-j(p+1)} \|f\|_{\mathbf{H}^{p+1}(\Omega_l)},
\end{aligned}$$

em que foi usado a propriedade de reprodução de polinômios em V_j e a estimativa da aproximação polinomial (2.24). A conclusão do teorema é obtida por intermédio da soma em k dos termos ao quadrado. ■

Com relação às aproximações nos espaços W_j segue a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{Q}^j f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} &= \|\mathcal{P}^{j+1} f - \mathcal{P}^j f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \|\mathcal{P}^{j+1} f - f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} + \|f - \mathcal{P}^j f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R})} \\
&\lesssim 2^{-j(p+1)} \|f\|_{\mathbf{H}^{p+1}(\mathbb{R})}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Nota 2.3 *As hipóteses do Teorema 2.3 exigem que as funções ϕ e ϕ^* tenham suporte compacto. No entanto os resultados podem ser estendidos para funções que tenham decaimento rápido [10]. Além disso, em Gomes [22] (Theorem 5.1) tem-se o seguinte resultado para funções f 1-periódicas:*

Seja ϕ é r-regular, isto é, se para $0 \leq k \leq r$ e para todo inteiro $n > 0$ existem constantes C_n tais que

$$\left|\frac{d^k f}{dx^k}\right| \leq C_n(1+|x|)^{-n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se ϕ satisfaz a CSF de ordem p, então é válida a seguinte estimativa

$$\left|f - \mathcal{P}^j f\right|_s \lesssim 2^{-j(p+1-s)} \left|f\right|_{p+1},$$

para $0 \leq s \leq \min\{r, p+1\}$, em que $|f|_s$ denota a seminorma

$$|f|_s = \left\|\frac{d^s f}{dx^s}\right\|_{\mathbf{L}^2[0,1]}.$$

Donde conclue-se que as estimativas abaixo são válidas para funções 1-periódicas,

$$\begin{aligned} \|f - \mathcal{P}^j f\|_{\mathbf{H}^s[0,1]} &\lesssim 2^{-j(p+1-s)}\|f\|_{\mathbf{H}^{p+1}[0,1]}, \\ \|\mathcal{Q}^j f\|_{\mathbf{H}^s[0,1]} &\lesssim 2^{-j(p+1-s)}\|f\|_{\mathbf{H}^{p+1}[0,1]}. \end{aligned}$$

Pode ser verificado que a ordem da *CSF* da função $\phi(x)$ está relacionada com a ordem dos zeros do filtro $H(\xi)$ em $\xi = \pi$ (ver Cohen [10] pag 102). Sendo $\{\phi(\cdot - k); k \in \mathbb{Z}\}$ base de Riesz segue que existe as constantes $0 < C_1 \leq C_2 < \infty$, tal que

$$C_1 \leq \sum_k |\widehat{\phi}(\xi + 2k\pi)|^2 \leq C_2.$$

Desta forma, para algum $k_0 \in \mathbb{Z}$ tem-se que $\widehat{\phi}((2k_0+1)\pi) \neq 0$. Tomando $\xi = 2(2k_0+1)\pi$ e substituindo em (2.2) segue que $H(\pi) = 0$. A prova segue derivando a equação (2.2).

Como conseqüência da relação (2.17), a ordem da *CSF* de ϕ é igual à ordem dos zeros de $G^*(\xi)$ em $\xi = 0$. Tendo em vista que

$$\mathcal{M}^k_{\psi^*} = (-i)^k \frac{d^k \widehat{\psi}^*}{dx^k}(0),$$

segue que os primeiros p-momentos da wavelet dual ψ^* se anulam, pois $\widehat{\psi}^*(\xi) = G^*(\xi/2)\widehat{\phi}^*(\xi/2)$, e $\widehat{\phi}^*(0) \neq 0$.

Como os coeficientes wavelets de uma função f são obtidos pelo produto interno $d^j(k) = \langle f, \psi^*_{j,k}\rangle$, sua ordem de grandeza está associada à suavidade da função no suporte de $\psi^*_{j,k}$ e ao número de momentos nulos de $\psi^*_{j,k}$ como mostra o teorema (ver Cohen [10] pag. 206).

Teorema 2.4 *Se ψ^* possui p-momentos nulos, então, para $f \in \mathbf{H}^{p+1}$ segue que*

$$|d^j(k)| \lesssim 2^{-j(p+1)} \|f\|_{\mathbf{H}^{p+1}(Supp\psi^*_{j,k})}. \tag{2.26}$$

Prova: Se ψ^* possui p-momentos nulos então $\langle q, \psi^*_{j,k} \rangle = 0$ para $q \in \mathbb{P}_p$. Logo

$$\begin{aligned} |d^j(k)| &= \left|\langle f, \psi^*_{j,k} \rangle\right| \\ &= \left|\langle f - q, \psi^*_{j,k} \rangle\right| \\ &\leq \|\psi^*_{j,k}\|_{\mathbf{L}^2} \inf_{q \in \mathbb{P}_p} \|f - q\|_{\mathbf{L}^2(\text{Supp}\psi^*_{j,k})}. \end{aligned}$$

A estimativa do teorema segue por intermédio do Teorema de Whitney [10], pelo qual

$$\inf_{q \in \mathbb{P}_p} \max_{x \in \text{Supp}\psi^*_{j,k}} |f - q| \lesssim 2^{-j(p+1)} \|f\|_{\mathbf{H}^{p+1}(\text{Supp}\psi^*_{j,k})}.$$

■

Portanto os coeficientes $d^j(k)$ podem ser usados como indicadores locais da regularidade da função f, pois são pequenos em regiões de suavidade da f e grandes em regiões em que f apresenta singularidades ou fortes gradientes. Se a função f é suave, exceto por algumas singularidades isoladas, as expansões em wavelets podem ser mais econômicas, no sentido que a maioria dos coeficientes $d^j(k)$ podem ser desprezados. Isto é, determina-se os conjuntos de índices $F_l = \{k; |d^l(k)| \text{ é significativo}\}$, para $l = J, J+1, \ldots, j-1$, sobre os quais, uma base lacunar é obtida.

$$\{\phi_{J,k}; k \in \mathbb{Z}\} \bigcup_{l=J}^{j-1} \{\psi_{l,k}; k \in F_l\}.$$

Este é o principio básico da maioria das aplicações em análise wavelets.

2.5 Avaliação de ϕ, suas Derivadas e Momentos

Em geral, não se tem as expressões analíticas para funções de escalonamento ϕ, uma vez que elas são definidas implicitamente pela relação de escalonamento (2.1). No entanto, conhecendo os valores de $\phi(x)$ nos inteiros $x = n$, podem-se calcular os valores de $\phi(x)$ nos pontos diádicos $x = 2^{-j}n$, por intermédio da relação de escalonamento (2.1). Supondo que ϕ tenha uma certa regularidade r, o mesmo procedimento é válido no cálculo das derivadas de ϕ de ordem $m \leq r$. Para obter os valores de ϕ e suas derivadas nos inteiros é necessário resolver as equações

$$\frac{d^m\phi}{dx^m}(n) = 2^{m+1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(k) \frac{d^m\phi}{dx^m}(2n - k), \quad m = 0, 1, \ldots, r$$

que podem ser escritas na forma

$$\frac{1}{2^m} \frac{d^m\phi}{dx^m}(n) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h(2n - k) \frac{d^m\phi}{dx^m}(k). \tag{2.27}$$

Este é um problemas de autovalor, em que os valores $\left\{\frac{d^m\phi}{dx^m}(n)\right\}$ formam o autovetor correspondente ao autovalor $\nu_m = 1/2^m$ associado à matriz A, cujos elementos são da forma $a_{i,j} = 2h(2i-j)$. Como qualquer múltiplo de um autovetor também é autovetor, um fator de normalização se faz necessário para que os valores sejam obtidos de forma única. Este pode ser obtido por intermédio do próximo lema.

Lema 2.1 *Seja ϕ uma função de escalonamento com regularidade r e a ordem da CSF igual a $p \geq r$, e seja $m \leq r \leq p$. Então a seguinte relação é válida*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}(x+k)^s\frac{d^m\phi}{dx^m}(x+k) = \begin{cases} 0 & \textit{para}\ \ s < m, \\ \dfrac{s!}{(s-m)!}(-1)^m\mathcal{M}_\phi^{s-m} & \textit{para}\ \ m \leq s \leq p, \end{cases} \tag{2.28}$$

em que $\mathcal{M}_\phi^m$ é o m-ésimo momento da função ϕ.

<u>Prova</u>: Seja $f(x) := x^s\dfrac{d^m\phi}{dx^m}(x)$ e considere

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}(x+k)^s\frac{d^m\phi}{dx^m}(x+k).$$

Pela fórmula do somatório de Poisson e pela ordem da *CSF* da função ϕ segue que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(2k\pi)e^{ix2k\pi} = \widehat{f}(0). \tag{2.29}$$

A transformada de Fourier da função f satisfaz a seguinte relação

$$\widehat{f}(\xi) = (-1)^s i^{m-s}\frac{d^s}{d\xi^s}(\sigma(\xi)\widehat{\phi}(\xi)),$$

em que $\sigma(\xi) = \xi^m$ e com isto, segue que

$$\widehat{f}(0) = (-1)^s i^{m-s}\sum_{n=0}^{s}\begin{pmatrix} s \\ n \end{pmatrix}\frac{d^n\sigma}{d\xi^n}(0)\frac{d^{s-n}\widehat{\phi}}{d\xi^{s-n}}(0). \tag{2.30}$$

Logo, se $s < m \leq p$, a equação (2.30) é nula. Se $m \leq s$ apenas um termo de (2.30) não se anula ($n = m$) obtendo assim

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(2k\pi)e^{ix2k\pi} &= (-1)^s i^{m-s}\begin{pmatrix} s \\ m \end{pmatrix} m!\frac{d^{s-m}\widehat{\phi}}{d\xi^{s-m}}(0) \\ &= \frac{s!}{(s-m)!}(-1)^m\mathcal{M}_\phi^{s-m}.\end{aligned}$$

■

Desta forma, tomando $x = 0$ e $s = m$ na equação (2.28), e lembrando que $\mathcal{M}_\phi^0 = 1$, obtém-se o fator de normalização

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^m \frac{d^m\phi}{dx^m}(k) = (-1)^m m!. \tag{2.31}$$

Com relação ao cálculo dos momentos $\mathcal{M}_\phi^s$, $s \geq 1$, da relação de escalonamento segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\phi^s &= \int_{\mathbb{R}} x^s\phi(x)dx = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)\int_{\mathbb{R}} x^s\phi(2x-k)dx \\
&= 2^{-s}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k)\int_{\mathbb{R}} (x+k)^s\phi(x)dx \\
&= 2^{-s}\sum_{i=0}^{s}\begin{pmatrix} s \\ i \end{pmatrix}\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^i h(k)\int_{\mathbb{R}} (x)^{s-i}\phi(x)dx \\
&= 2^{-s}\sum_{i=0}^{s}\begin{pmatrix} s \\ i \end{pmatrix}\mu_H^i\mathcal{M}_\phi^{s-i},
\end{aligned}$$

em que μ_H^i são os momentos discretos do filtro H, isto é

$$\mu_H^i = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^i h(k).$$

Conseqüentemente, o s-ésimo momento de ϕ pode ser calculado pela relação recursiva

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_\phi^0 &= 1 \\
\mathcal{M}_\phi^s &= \frac{1}{2^s-1}\sum_{l=1}^{s}\begin{pmatrix} s \\ l \end{pmatrix}\mu_H^l\mathcal{M}_\phi^{s-l},\ s = 1, 2, \ldots.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

2.6 Splines e Wavelets

Pela sua facilidade de implementação numérica, as funções splines são comumente usadas na aproximação de funções. Nesta seção são apresentados diferentes exemplos de decomposição em multiescala baseados nas B-splines. Seja B_{N^*} a B-spline de ordem N^*, que pode ser construída de modo iterativo pela convolução

$$B_{N^*}(x) = \int_{\mathbb{R}} B_1(y)B_{N^*-1}(x-y)dy,$$

em que B_1 é a função característica do intervalo $[0, 1)$, isto é

$$B_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As B-splines satisfazem algumas propriedades de interesse na construção de familias de funções wavelets, que são apresentadas no seguinte teorema (ver Chui [7] pag. 85).

Teorema 2.5 *A B-spline de ordem N^* satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) B_{N^*} *é um polinômio de grau N^*-1 quando restrita aos intervalos $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$ e é de classe $\mathbf{C}^{N^*-1}$.*

(ii) B_{N^*} *tem suporte de comprimento N^*, sendo*

$$\operatorname{Supp}(B_{N^*}) = \begin{cases} \left[-\frac{N^*-1}{2}, \frac{N^*+1}{2}\right], & \textit{para } N^* \textit{ ímpar}, \\ \left[-\frac{N^*}{2}, \frac{N^*}{2}\right], & \textit{para } N^* \textit{ par}. \end{cases}$$

(iii) A função B_{N^*} é positiva no interior de seu suporte.

(iv) $B_{N^*}(x)$ *é simétrica em torno de $x = 0$, para N^* par e simétrica em torno de $x = 1/2$ para N^* ímpar.*

(v) A função B_{N^*} satisfaz a CSF com ordem N^*-1 e sua transformada de Fourier é da forma

$$\widehat{B}_{N^*}(\xi) = e^{-i\alpha\xi} \left(\frac{\operatorname{sen}(\xi/2)}{\xi/2} \right)^{N^*},$$

em que $\alpha = 0$ para N^* par ou $\alpha = 1/2$ para N^* ímpar.

(vi) Existem constantes $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$C_1 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{B}_{N^*}(\xi - 2k\pi)|^2 \leq C_2.$$

Denotando por ϕ_{N^*} a B-spline de ordem N^*, tem-se que as funções $\{\phi^*_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$, em que $\phi^*_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi_{N^*}(2^j x - k)$, formam uma base de Riesz para os espaços de funções splines

$$V^*_j = \{f \in \mathbf{L}^2 \cap \mathbf{C}^{N^*-2};\ f|_{I_{j,k}} \in \mathbb{P}_{N^*-1}\},$$

em que $I_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$ são os intervalos diádicos de comprimento 2^{-j}. Os espaços V^*_j definem uma *AMr* de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ e as propriedades (M1)-(M5) da Definição 2.2 são válidas. Neste caso, o filtro de escalonamento tem a seguinte forma

$$H^*(\xi) = e^{-i\alpha\xi} \left(\cos \frac{\xi}{2} \right)^{N^*},$$

em que $\alpha = 0$ para N^* par, e $\alpha = 1/2$ para N^* ímpar.

A seguir, são apresentados alguns exemplos de famílias de wavelets baseadas nas B-splines.

- **Wavelets Splines Ortogonais**

Pela proposta de Lemarié [26], wavelets splines ortonormais podem ser obtidas por um processo de ortogonalização sobre as B-splines. Pela propriedade (v) do Teorema 2.5, e usando o Teorema de Wiener-Lévy (ver Schoenberg [33], Lema 11, pag.187), fica bem definida a função

$$\widehat{\phi}^{o}_{N^*}(\xi) = \frac{\widehat{\phi}_{N^*}(\xi)}{[S_{\phi_{N^*}}(\xi)]^{1/2}},$$

em que

$$S_{\phi_{N^*}}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{\phi}_{N^*}(\xi + 2k\pi)\right|^2.$$

Desta forma, resulta que a condição de ortogonalidade

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\phi}^{o}_{N^*}(\xi + 2k\pi)|^2 \equiv 1$$

é satisfeita. Além disto, a função $\phi^o_{N^*}$ é simétrica em $x = 0$ para N^* par, e simétrica em $x = 1/2$ para N^* ímpar. A função $\phi^o_{N^*}$ também satisfaz a *CSF* de ordem $N^* - 1$. Para $N^* > 1$, a função $\phi^o_{N^*}$ não tem suporte compacto, mas apresenta decaimento exponencial no infinito [10]. É satisfeita a relação de escalonamento para $\phi^o_{N^*}$

$$\phi^o_{N^*}(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} h^o(k)\phi^o_{N^*}(2x - k),$$

em que os coeficientes $h^o(k)$ são os coeficientes do polinômio trigonométrico

$$H^o(\xi) = \left(\frac{S_{\phi_{N^*}}(\xi)}{S_{\phi_{N^*}}(2\xi)}\right)^{1/2} H^*(\xi). \tag{2.33}$$

A implementação computacional do algoritmo de Análise pode ser feita no domínio de Fourier, com a ajuda da transformada rápida de Fourier. A implementação no espaço físico só poderia ser feita com o truncamento da seqüência de coeficientes $\{h^o(k)\}$, que tem suporte infinito. Mas isto acarreta erros de truncamento que devem ser considerados.

A wavelet ortogonal $\psi^o_{N^*}$ é derivada de acordo com a relação de escalonamento

$$\psi^o_{N^*}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g^o(k)\phi^o_{N^*}(2x - k),$$

em que $g^o(k) = (-1)^k h^o(1-k)$. A propriedade de simetria da função $\psi^o_{N^*}$ ocorre em torno de $x = 1/2$, sendo que, para N^* par $\psi^o_{N^*}$ é anti-simétrica e para N ímpar $\psi^o_{N^*}$ é simétrica. (ver Daubechies [16] pag. 146)

- **Wavelets Splines Interpoladoras**

Por um processo similar ao caso ortogonal, define-se a função $\phi^i_{N^*}$ por

$$\widehat{\phi}^i_{N^*}(\xi) = \frac{\widehat{\phi}_{N^*}(\xi)}{\widetilde{\phi}_\alpha(\xi)},$$

em que

$$\widetilde{\phi}_\alpha(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi_{N^*}(\alpha + k)e^{-ik\xi}.$$

Novamente, pelo Teorema de Wiener-Lévy, esta função fica bem definida se for satisfeita a condição de interpolação

$$\widetilde{\phi}_\alpha(\xi) \neq 0, \ \ \forall\xi \in [-\pi, \pi]. \tag{2.34}$$

As funções B-splines satisfazem esta condição com $\alpha = 0$ para N^* par e $\alpha = 1/2$ no caso de N^* ímpar [33]. Conseqüentemente, com tais escolhas de α, a função $\phi^i_{N^*}(x)$ fica bem definida e resulta ser uma função interpoladora tal que $\phi^i_{N^*}(k+\alpha) = \delta_k$. A função $\phi^i_{N^*}$ é simétrica em $x = 0$ para N^* par, e simétrica em $x = 1/2$ para N^* ímpar. Ela também satisfaz a *CSF* com ordem de $N^* - 1$. Para $N^* > 2$, a relação de escalonamento (2.1) é satisfeita com infinitos coeficientes $h^i(k)$ não nulos, em que o filtro $H^i_{N^*}(\xi)$ é da forma

$$H^i(\xi) = \left(\frac{\widetilde{\phi}_{N^*}(\xi)}{\widetilde{\phi}_{N^*}(2\xi)}\right) H^*(\xi). \tag{2.35}$$

A função wavelet correspondente é dada por

$$\psi^i_{N^*}(x) = 2\phi^i_{N^*}(2x - 1),$$

a qual satisfaz as mesmas propriedades de simetria e a mesma ordem da *CSF* da função $\phi^i_{N^*}$.

- **Wavelets Splines Biortogonais**

Tanto no caso ortogonal quanto no caso interpolador, os filtros (2.33), (2.35) apresentam infinitos coeficientes não nulos, o que implica que as wavelets tenham suporte infinito e que a implementação dos algoritmos de Análise e Síntese seja feita no domínio de Fourier. Se é de interesse espaços complementares para os splines com bases wavelets de suporte limitado, e filtros com um número finito de coeficientes não nulos, então é necessário abrir mão da ortogonalidade e da interpolação, e adotar um esquema biortogonal. Na proposta de Cohen, Daubechies e Feauveau [12], este esquema é caracterizado pela escolha de inteiros positivos de mesma paridade N^* e N, isto é, $N^* + N = M$ é um número par. Seja $\phi_{N^*}(x)$ a B-spline de ordem N^*. No caso par $N^* = 2l^*$, para $N = 2l$, consideram-se os filtros definidos por

$$H(\xi) = \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^N \sum_{k=0}^{l+l^*-1} \binom{l + l^* - 1 + k}{k} \left(\mathrm{sen}\frac{\xi}{2}\right)^{2k}.$$

Já no caso de inteiros ímpares $N^* = 2l^* + 1$, para $N = 2l + 1$, consideram-se os filtros da forma

$$H(\xi) = e^{-i\xi/2}\left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^N \sum_{k=0}^{l+l^*}\left(\begin{array}{c} l+l^*+k \\ k \end{array}\right)\left(\mathrm{sen}\frac{\xi}{2}\right)^{2k}.$$

Para cada N, suficientemente grande, existe uma função de escalonamento ϕ_{N,N^*} associada ao filtro $H(\xi)$. Prova-se que sua regularidade r satisfaz a relação (ver Cohen [10] Theorem 2.10.1)

$$r \geq 0.2N - 0.8N^* + 1.6. \tag{2.36}$$

No caso de N par, a função a $\phi_{N,N^*}(x)$, é simétrica em torno de $x = 0$ e possui suporte em $[-\frac{N^*}{2} - N + 1, \frac{N^*}{2} + N - 1]$. Para N ímpar a função $\phi_{N,N^*}(x)$, simétrica em torno de $x = 1/2$ e cujo suporte é dado por $[-\frac{N^*-1}{2} - N + 1, \frac{N^*-1}{2} + N]$. Outro fato importante a ser observado é que cada uma das funções ϕ_{N,N^*} gera uma base de Riesz (ver Cohen [10] Theorem 2.2.1) e, conjuntamente com a função ϕ_{N^*}, geram uma $AMrB$.

Em todos os casos, as funções de escalonamento ϕ_{N,N^*} satisfazem a CSF de ordem $N-1$. Com isto tem-se o seguinte lema.

Lema 2.2 *Seja ϕ_{N^*} função B-spline de ordem N^* e ϕ_{N,N^*} uma de suas funções de escalonamento biortogonais. Então vale a expressão*

$$\overline{\widehat{\phi}_{N,N^*}(w)}\widehat{\phi}_{N^*}(w) \sim 1 + \sum_{n=M/2}^{\infty} C_{2n} w^{2n},$$

em que $M = N + N^*$.

<u>Prova:</u> Usando a fórmula do somatório de Poisson na relação de biortogonalidade obtém-se que

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{\widehat{\phi}_{N,N^*}(w+2k\pi)}\widehat{\phi}_{N^*}(w+2k\pi) \\ &= \overline{\widehat{\phi}_{N,N^*}(w)}\widehat{\phi}_{N^*}(w) + \sum_{k\neq 0} \overline{\widehat{\phi}_{N,N^*}(w+2k\pi)}\widehat{\phi}_{N^*}(w+2k\pi) \\ &= \overline{\widehat{\phi}_{N,N^*}(w)}\widehat{\phi}_{N^*}(w) + \sum_{k\neq 0} f_k(w), \end{aligned}$$

em que $f_k(w) = \overline{\widehat{\phi}_{N,N^*}(w+2k\pi)}\widehat{\phi}_{N^*}(w+2k\pi)$. Pela CSF das funções ϕ_{N,N^*} e ϕ_{N^*}, segue que para $n \leq N + N^* - 1$.

$$\frac{d^n f_k}{dw^n}(0) = 0.$$

Além disso, da simetria de ϕ_N e ϕ_{N,N^*}, segue que $f_k(-w) = f_k(w)$, logo

$$\frac{d^n f_k}{dw^n}(0) = 0$$

para n ímpar. Desta forma, segue que a série $\sum_{k\neq 0} f_k(w)$, que define uma função de classe $\mathbf{C}^\infty$, se anula em $w=0$, juntamente com todas as derivadas de ordem menor ou igual a M e todas as derivadas de ordem ímpar. Desta forma o resultado do Lema é válido ■

- **Caso Extremo** $N^* = 0$

Seja $\theta_M(x)$ a função

$$\theta_M(x) = \int_{\mathbb{R}} \phi_{N^*}(y)\phi_{N,N^*}(y+x)dy, \tag{2.37}$$

em que $M = N + N^*$. É interessante observar que esta definição não depende da escolha dos pares N, N^* [23]. Como conseqüência imediata da relação de biortogonalidade, tem-se que

$$\theta_M(k) = \delta_k. \tag{2.38}$$

Como ϕ_{N,N^*} e ϕ_{N^*} possuem suporte compacto, então θ_M também tem suporte compacto, dado por $[-M+1, M-1]$. A função θ_M satisfaz a relação de escalonamento

$$\theta_M(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(k)\theta_M(2x-k), \tag{2.39}$$

em que os coeficientes $p(k)$ são dados por

$$p(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)h^*(n-k). \tag{2.40}$$

Com isto o filtro correspondente pode ser escrito em função dos filtros H e H^* da forma $P_M(\xi) = H(\xi)\overline{H^*(\xi)}$, que equivale a

$$P_M(\xi) = \left(\cos\frac{\xi}{2}\right)^M \sum_{k=0}^{M/2-1} \binom{M/2-1+k}{k} \left(\text{sen}\frac{\xi}{2}\right)^{2k}. \tag{2.41}$$

O filtro P_M é chamado de filtro escalonamento interpolador e satisfaz as propriedades [23],

(i) $P_M(\xi)$ é simétrico em relação a $\xi = 0$.

(ii) $P_M(\xi) \geq 0$ para $\xi \in \mathbb{R}$ e $P_M(\xi) = 0$ se e somente se $\xi = k\pi,\ 0 \neq k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Para $\overline{\xi} = 0, \pi$ tem-se
$$\frac{d^k P_M}{d\xi^k}(\overline{\xi}) = 0,\ \ 1 \leq k \leq M-1.$$

(iv) Como conseqüência de (2.18), o filtro P satisfaz a seguinte relação
$$P(\xi) + P(\xi+\pi) \equiv 1.$$

De acordo com o *Remark* 2.8.2 em Cohen [10], a propriedade (ii) implica que θ_M gera uma base de Riesz.

Como $\hat{\theta}_M(\xi) = P_M(\xi/2)\hat{\theta}_M(\xi/2)$, a propriedade (iii) implica que

$$\mathcal{M}_{\theta_M}^k = 0, \ \ 1 \leq k \leq M-1.$$

Pela relação de escalonamento (2.39), obtém-se que

$$\theta_M(n/2) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(k)\theta_M(n-k) = 2p(n), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Como conseqüência de (2.38), segue que $p(0) = 1/2$ e os demais coeficientes de índices pares se anulam. As funções θ_M também são conhecidas como funções fundamentais dos esquemas de refinamento diádicos de Deslauriers e Dubuc, por intermédio de interpolação polinomial centrada de Lagrange de grau $M-1$ [18].

Observa-se que a propriedade (2.38) pode ser vista, no sentido de distribuição, como

$$\langle \theta_M(\cdot - k), \delta(\cdot - l)\rangle = \delta_{k-l}.$$

Como a função $\delta(x)$, delta de Dirac, satisfaz a relação de escalonamento $\delta(x) = 2\delta(2x)$, as funções $\delta(x)$ e $\theta_M(x)$ podem ser vistas como as funções de escalonamento biortogonais. Neste sentido, $\theta_M(x)$ gera uma análise de multirresolução interpoladora que pode ser pensada como caso extremo das splines biortogonais para $N^* = 0$: $\phi_0(x) = \delta(x)$ e $\phi_{0,M}(x) = \theta_M(x)$. As funções wavelets correspondentes são da forma

$$\psi^*(x) = 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} g^*(k)\delta(2x-k) \quad \text{e} \quad \psi(x) = 2\theta_M(2x-1). \tag{2.42}$$

A transformada de Fourier da função θ_M é dada por

$$\widehat{\theta}_M(\xi) = \widehat{\phi}_{N^*}(\xi)\overline{\widehat{\phi}_{N,N^*}(\xi)},$$

e portanto a função θ_M satisfaz a *CSF* de ordem $M-1$. Além disso, da simetria da função θ_M em torno de $x=0$ segue que os momentos de ordem ímpar são nulos e como conseqüência segue que

$$\widehat{\theta}_M(\xi) = 1 + \sum_{n=M/2}^{\infty} C_{2n}\xi^{2n}. \tag{2.43}$$

Observa-se que as constantes C_{2n} são as mesmas constantes do Lema 2.2.

Nas Figuras 2.1-2.5 são apresentados os gráficos de alguns exemplos de splines biortogonais. Estes gráficos foram gerados por intermédio do procedimento descrito na seção 2.5, pela avaliação das funções nos inteiros e do uso da relação de escalonamento para obter os valores nos pontos diádicos. Uma observação se faz necessária. Este procedimento considera que o problema de autovalor apresenta um único autovetor que satisfaz a condição de normalização (2.31) para cada autovalor. Mas nem sempre isto é verdade, pois podem existir dois (ou mais) autovetores para um autovalor, ou o fator de normalização pode não ser satisfeito. Por exemplo, para o autovalor $\nu_0 = 1$ do problema associado à função $\phi_{2,2}(x)$, o fator de normalização é zero. Como conseqüência, a função não é definida nos inteiros. De fato, $\phi_{2,2} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R})$ mas é descontínua nos pontos diádicos. O que está representado pelo gráfico é apenas uma aproximação de $\phi_{2,2}$, obtida pelo algoritmo de cascata descrito em [16].

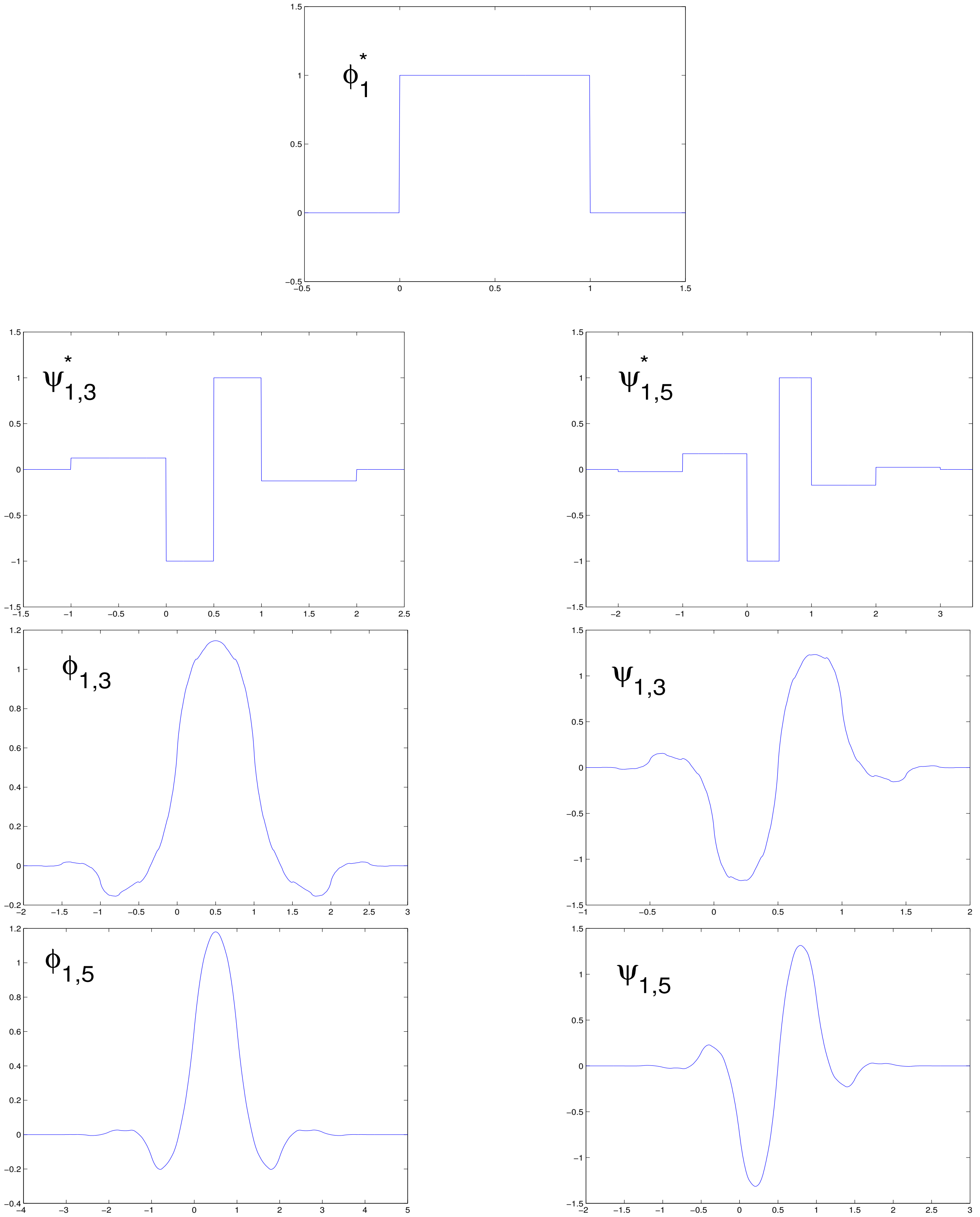


Figura 2.1: Splines Biortogonais - Famílias $(N^*, N) = (1, 3), (1, 5)$

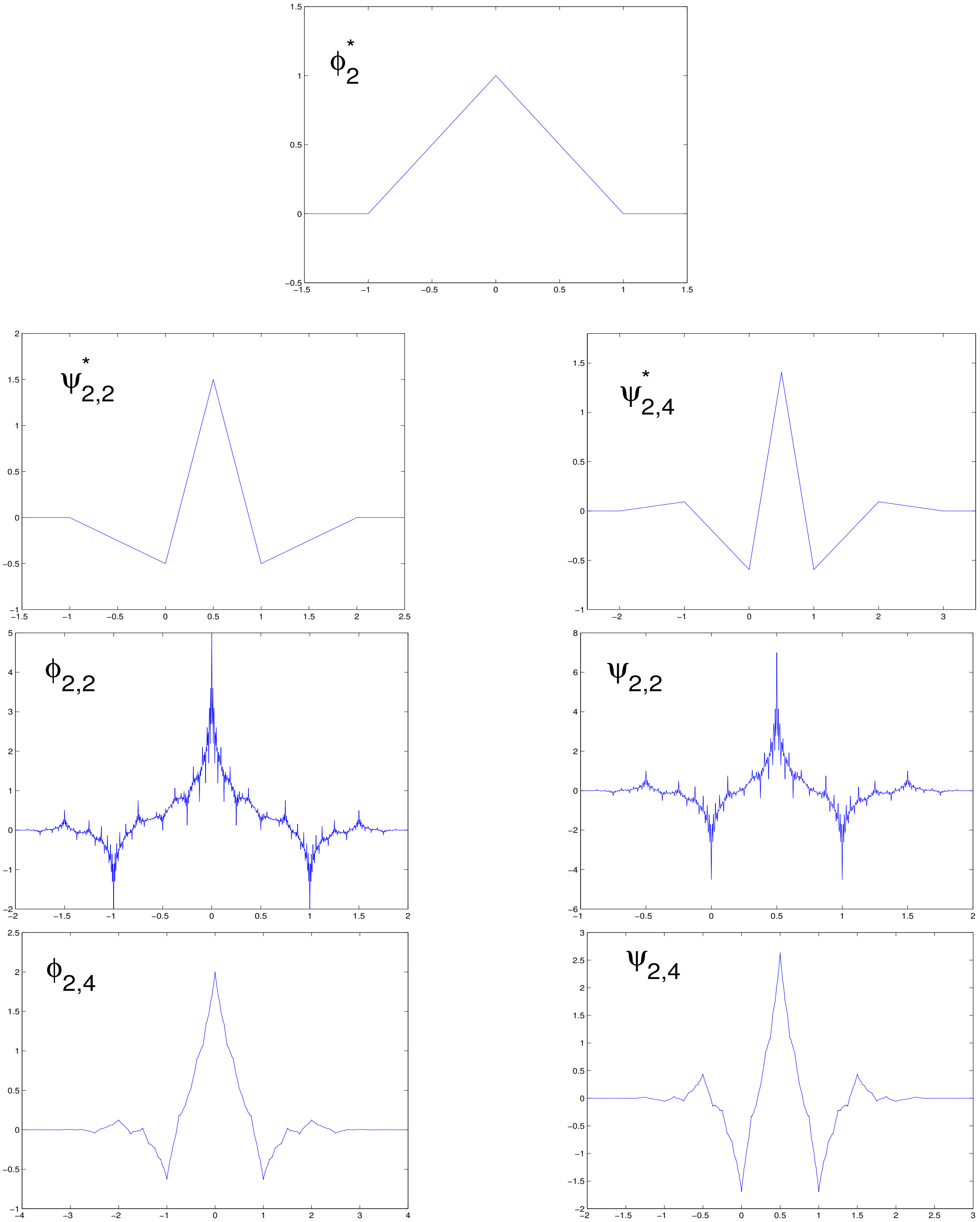


Figura 2.2: Splines Biortogonais - Famílias $(N^*, N) = (2, 2), (2, 4)$

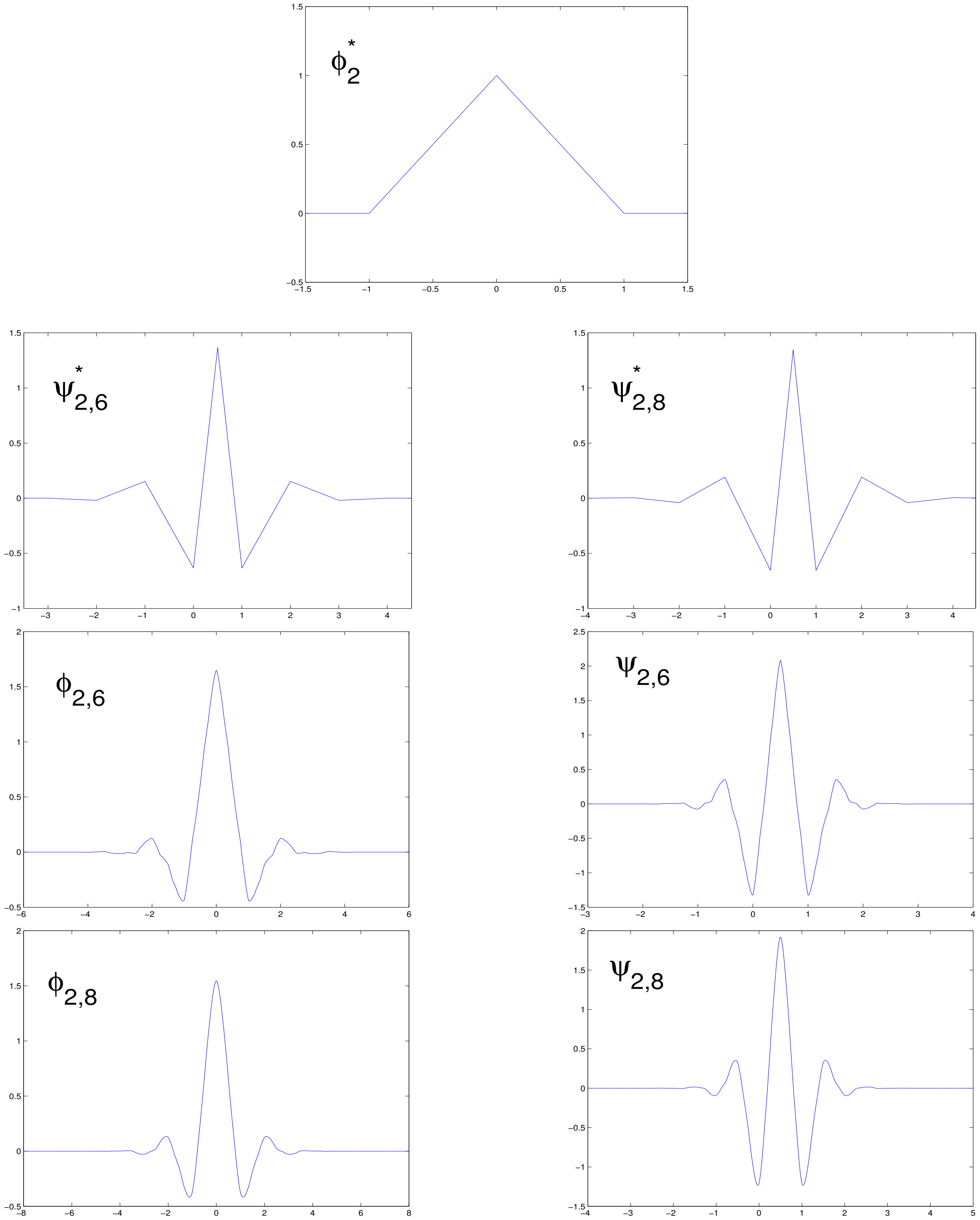


Figura 2.3: Splines Biortogonais - Famílias $(N^*, N) = (2, 6), (2, 8)$

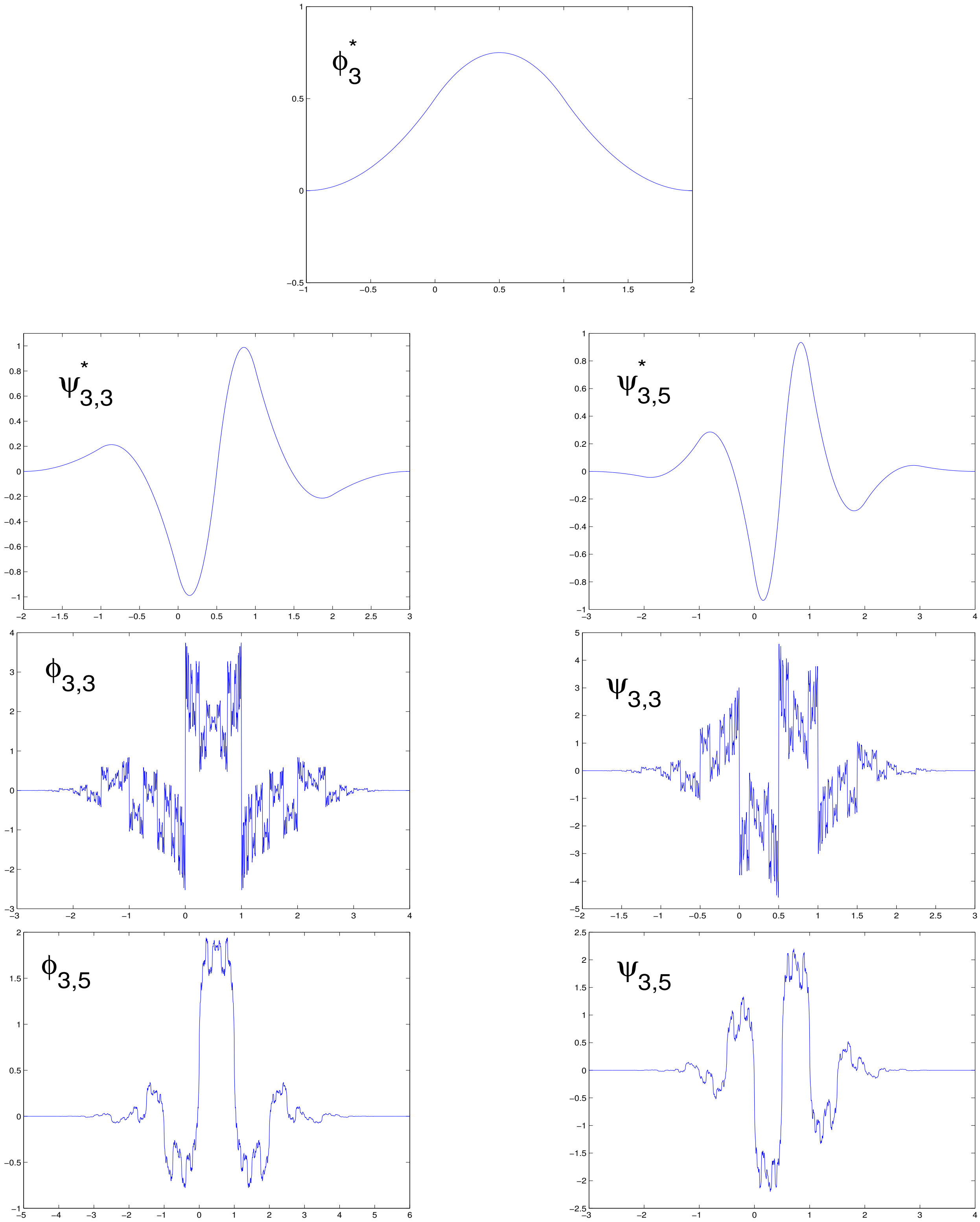


Figura 2.4: Splines Biortogonais - Famílias $(N^*, N) = (3, 3), (3, 5)$

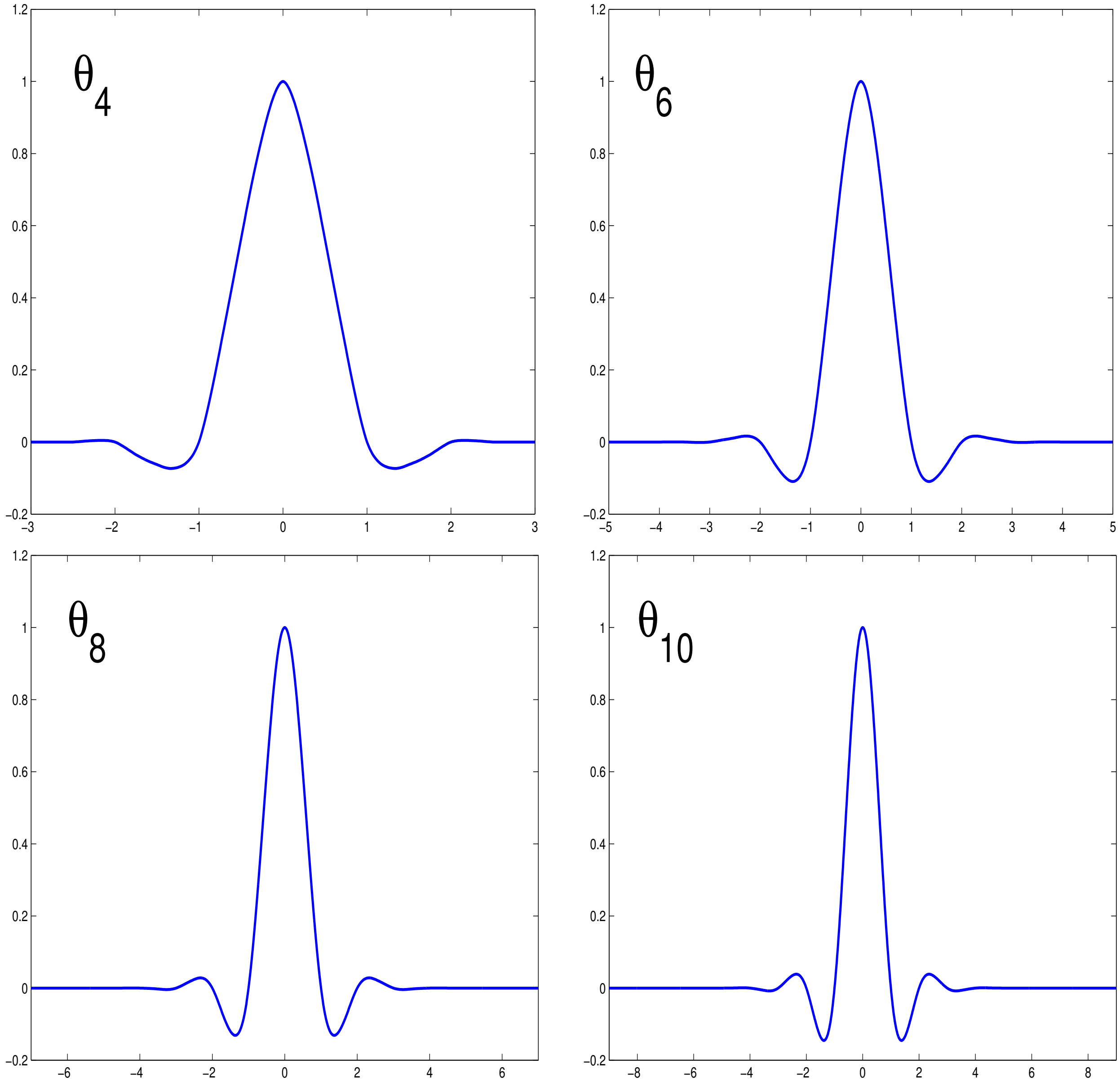


Figura 2.5: Splines Biortogonais - Caso Extremo $N^* = 0$

Capítulo 3

Esquemas de Aproximação em Multirresolução

Este Capítulo é dedicado à análise de esquemas de aproximação no contexto da análise de multirresolução biortogonal. Com este objetivo, é útil o formalismo apresentado por Harten [24], no qual um esquema de aproximação é representado por um par de operadores $\{\mathcal{D}^j, \mathcal{R}^j\}$, em que $\mathcal{D}^j$ é o operador de discretização, que associa uma função à valores discretos, e $\mathcal{R}^j$ é o operador de reconstrução, que fornece uma aproximação de uma função por intermédio de seus valores discretos. No caso da projeção biortogonal, tem-se que $\mathcal{P}^j u(x) = \mathcal{R}^j(x; \mathcal{D}^j u)$, em que os operadores de discretização e reconstrução são da forma

$$(\mathcal{D}^j u)(k) = 2^j \int_{\mathbb{R}} u(x)\phi^*_{j,k}(x)dx, \quad \mathcal{R}^j(x; \mathbf{u}^j) = \sum_k u^j(k)\phi_{j,k}(x).$$

São de interesse esquemas alternativos $\mathcal{I}^j u(x) = \mathcal{R}^j(x; \mathcal{D}^j_c u)$, em que as discretizações $\mathcal{D}^j_c$ são definidas pela combinação de distribuições do tipo delta de Dirac. Em especial, são analisados os operadores de interpolação, quase interpolação e projeção discreta. Resultados desta análise mostram que tais esquemas alternativos possuem a mesma ordem de aproximação dos esquemas de projeção biortogonal.

Em multinível, também podem ser visualizados esquemas de aproximação $\{\mathcal{D}^j_{c,ME}, \mathcal{R}^j_{ME}\}$, em que são usados esquemas de discretização alternativos $\mathcal{D}^j_{c,ME} = \{\mathcal{D}^J_c, \mathcal{G}^J_c, \ldots \mathcal{G}^{j-1}_c\}$. São analisadas duas possibilidades. Na primeira aplica-se o algoritmo de Análise usual (Algoritmo 2.1) substituindo, em cada nível intermediário, a discretização $\mathcal{D}^l$ por $\mathcal{D}^l_c$. Comparando os valores exatos $\mathcal{G}^l u$ com $\mathcal{G}^l_c u$, não se verifica uma boa precisão nos níveis menos refinados. Esta dificuldade é contornada quando se considera uma segunda possibilidade, em termos de um algoritmo de Análise Modificado. Isto foi originalmente proposto por Fröhlich e Schneider [20] para a interpolação e explorada por Ware [35] para a projeção discreta. Resultados aqui apresentados mostram que a eficiência do algoritmo de Análise Modificado depende, essencialmente, que o esquema de aproximação seja conservativo. Neste sentido, os esquemas de quase interpolação ficam prejudicados.

3.1 Formulação Geral

Em esquemas de aproximação, as funções pertencentes a um dado espaço funcional V são representadas em termos de duas aplicações duais. Por um lado, está o operador de discretização $\mathcal{D}^j$ que associa, a cada função $u \in V$, um vetor de valores discretos $\mathbf{u}^j$ pertencente a um espaço vetorial discreto E^j

$$\mathcal{D}^j : V \to E^j. \tag{3.1}$$

Por outro lado, está o operador de reconstrução $\mathcal{R}^j$ que, a partir de seus valores discretos $\mathbf{u}^j$, fornece uma aproximação de u no espaço de aproximação $V_j \subset V$

$$\mathcal{R}^j : E^j \to V_j. \tag{3.2}$$

O esquema de aproximação definido pelo par de operadores $\{\mathcal{D}^j, \mathcal{R}^j\}$ é conservativo se $\mathcal{R}^j$ é o operador inverso à direita de $\mathcal{D}^j$. Isto é $\mathcal{D}^j\mathcal{R}^j(\cdot;\mathbf{u}^j) = \mathbf{u}^j$, $\forall \mathbf{u}^j \in E^j$. Em outras palavras, isto significa que o operador $\mathcal{R}^j\mathcal{D}^j$ é um operador de projeção.

Cabe observar que um esquema de discretização pode ser usado com diferentes tipos de reconstrução, e vice-versa, dando origem a uma extensa variedade de esquemas de aproximação.

3.2 Exemplos de Interesse

Tipicamente, os operadores de discretização $(\mathcal{D}^j u)(k)$ são definidos por funcionais lineares e os operadores de reconstrução são definidos por expansões em termos das funções básicas $\{\phi(2^j \cdot -k); k \in \mathbb{Z}\}$. Nos próximos parágrafos vários esquemas de aproximação são apresentados, diferenciando um do outro pela forma com que os operadores de discretização são definidos. Ou seja, em todos os exemplos assume-se que o operador de reconstrução é da forma

$$\mathcal{R}^j(x;\mathbf{u}^j) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u^j(k)\phi(2^j x - k).$$

Logo, para que o esquema $\{\mathcal{D}^j, \mathcal{R}^j\}$ seja conservativo é necessário e suficiente que o operador de discretização satisfaça

$$(\mathcal{D}^j\phi(2^j \cdot -k))(s) = \delta_{k-s}.$$

• **Projeção biortogonal**

Tem-se especial interesse em esquemas de aproximação em que os operadores de discretização e reconstrução são definidos em termos de funções *teste* e funções *trial* da seguinte forma

$$(\mathcal{D}^j u)(k) = 2^j \int_{\mathbb{R}} u(x)\phi^*(2^j x - k)dx, \quad \mathcal{R}^j(x;\mathbf{u}^j) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u^j(k)\phi(2^j x - k). \tag{3.3}$$

Neste caso, o esquema é conservativo se vale a relação de biortogonalidade

$$\int_{\mathbb{R}} \phi^*(x-k)\phi(x-l)dx = \delta_{k-l}.$$

Desta forma, o operador de projeção

$$\begin{aligned}(\mathcal{P}^j u)(x) &= \mathcal{R}^j(x; \mathcal{D}^j u) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{D}^j u)(k)\phi(2^j x - k) \end{aligned} \tag{3.4}$$

é a projeção biortogonal sobre o espaço V_j gerado pelas funções básicas $\{\phi(2^j \cdot -k), k \in \mathbb{Z}\}$.

Também são de interesse discretizações definidas pela combinação de distribuições do tipo delta de Dirac. Três casos de interesse são abordados: interpolação, quase interpolação e projeção discreta.

- **Esquema interpolador**

Para coeficientes $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ e constante $0 \leq \alpha < 1$ considera-se o operador de discretização do tipo

$$(\mathcal{D}_c^j u)(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma(n) u((k - n + \alpha)2^{-j}). \tag{3.5}$$

O que se deseja é obter $\gamma = \gamma_\alpha$ de tal forma que o operador

$$\mathcal{I}^j u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathcal{D}_c^j u)(k)\phi(2^j x - k) \tag{3.6}$$

interpole u nos pontos $x_k^j = (k+\alpha)2^{-j}$. Portanto, é necessário que

$$(\mathcal{D}_c^j \phi(2^j \cdot -l))(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma(n)\phi(k - l - n + \alpha) = \delta_{k-l}. \tag{3.7}$$

Desta forma, o esquema interpolador será conservativo. Isto é, as funções u_j definidas por

$$u_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u^j(k)\phi(2^j x - k),$$

devem satisfazer

$$(\mathcal{D}_c^j u_j)(s) = u^j(s).$$

Definindo

$$\widetilde{\phi}_\alpha(\xi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi(m+\alpha)e^{-im\xi}, \quad \widetilde{\gamma}(\xi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \gamma(m)e^{-im\xi}, \tag{3.8}$$

a condição para que o esquema seja conservativo (3.7), é equivalente à seguinte relação

$$\widetilde{\gamma}(\xi)\widetilde{\phi}_\alpha(\xi) \equiv 1. \tag{3.9}$$

Para que existam coeficientes $\gamma(k)$ de tal forma que $\mathcal{D}_c^j$ esteja associado a um esquema interpolador, é necessário e suficiente que seja satisfeita a condição de interpolação $\widetilde{\phi}_\alpha(\xi) \neq 0,\ \forall\xi$. Em geral, o esquema de interpolação requer um número infinito de coeficientes $\gamma(k)$ não nulos, que são obtidos por intermédio da relação (3.9). Todavia, a condição de interpolação pode ser substituída por uma condição menos restritiva e obter um esquema que requer um número finito de coeficientes não nulos.

- **Esquema Quase Interpolador**

Considera-se o operador de discretização sendo da mesma forma que no caso do esquema de interpolação, dado pela equação (3.5). Porém, os coeficientes $\gamma(k)$ agora serão escolhidos de tal forma que o operador $\mathcal{I}^j u(x)$, definido em (3.6), seja quase interpolador, como se define a seguir.

Definição 3.1 *Um operador $\mathcal{I}^j$ é quase interpolador, de ordem n, se*

$$\mathcal{I}^j q(x) = q(x)$$

para todo polinômio $q(x)$ de grau menor ou igual a n.

A seguir, a condição de quase interpolação é traduzida em termos de relações entre os momentos discretos de γ,

$$\mu_\gamma^l = \sum_{k\in\mathbb{Z}} k^l \gamma(k), \tag{3.10}$$

e os momentos da função ϕ.

Lema 3.1 *Seja p a ordem da CSF da função $\phi(x)$, e suponha que $0 \leq n \leq p$. Para que o operador $\mathcal{I}^j u(x)$ seja quase interpolador, de ordem n, é necessário e suficiente que sejam válidas as seguintes relações de momento*

$$\sum_{l=0}^{m} \begin{pmatrix} m \\ l \end{pmatrix} \mu_\gamma^l \mathcal{M}_\phi^{m-l} = \alpha^m,\ 0 \leq m \leq n. \tag{3.11}$$

<u>Prova</u>: Pela Definição 3.1, os coeficientes $\gamma(k)$ devem ser tais que, para $0 \leq m \leq n$,

$$\begin{aligned} x^m &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma(n)(k-n+\alpha)^m \phi(x-k) \\ &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} (s+\alpha)^m \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma(n)\phi(x-s-n) \\ &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} (s+\alpha)^m \Phi(x-s) \\ &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} f_\alpha(s;x), \end{aligned} \tag{3.12}$$

em que a função $\Phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma(n)\phi(x-n)$ e a função $f_\alpha(y;x) = (y+\alpha)^m\Phi(x-y)$. A transformada de Fourier de Φ satisfaz $\widehat{\Phi}(\xi) = \widetilde{\gamma}(\xi)\widehat{\phi}(\xi)$, donde conclue-se que $\Phi(x)$ também satisfaz a *CSF* de ordem p. Tendo em vista que

$$\begin{aligned}
\widehat{f_\alpha}(\xi;x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y}(y+\alpha)^m\Phi(x-y)dy \\
&= e^{-ix\xi}\sum_{s=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m \\ s \end{array}\right)(x+\alpha)^{m-s}(-1)^s\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi y}(y)^s\Phi(y)dy \\
&= e^{-ix\xi}\sum_{s=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m \\ s \end{array}\right)(x+\alpha)^{m-s}\frac{(-1)^s}{(-i)^s}\frac{d^s\widehat{\Phi}}{d\xi^s}(-\xi),
\end{aligned}$$

então $\widehat{f_\alpha}(2\pi k;x) = 0$ para $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Para $k=0$ segue que

$$\begin{aligned}
\widehat{f_\alpha}(0;x) &= \sum_{s=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m \\ s \end{array}\right)(x+\alpha)^{m-s}\frac{(-1)^s}{(-i)^s}\frac{d^s\widehat{\Phi}}{d\xi^s}(0) \\
&= \sum_{s=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m \\ s \end{array}\right)(x+\alpha)^{m-s}(-1)^s\mathcal{M}_\Phi^s.
\end{aligned}$$

Usando a fórmula do somatório de Poisson e a equação (3.12) tem-se que os momentos $\mathcal{M}_\Phi^s$ devem satisfazer a relação

$$x^m = \widehat{f_\alpha}(0;x) = \sum_{s=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m \\ s \end{array}\right)(x+\alpha)^{m-s}(-1)^s\mathcal{M}_\Phi^s.$$

Esta igualdade só é possível se

$$\mathcal{M}_\Phi^m = \alpha^m.$$

O Lema fica provado ao considerar $\xi = 0$ na expressão

$$\frac{d^m\widehat{\Phi}}{d\xi^m}(\xi) = \sum_{s=0}^{m}\left(\begin{array}{c} m \\ s \end{array}\right)\frac{d^s\widetilde{\gamma}}{d\xi^s}(\xi)\frac{d^{m-s}\widehat{\phi}}{d\xi^{m-s}}(\xi).$$

■

Tendo em vista que a *CSF* da função $\phi(x)$ determina o grau dos polinômios que podem ser representados em V_j, então a ordem de um esquema quase interpolador também está limitada pela ordem da *CSF* de $\phi(x)$.

A seguir será deduzida uma relação para os esquemas quase interpolador que substitua da condição (3.9), que é válida para a interpolação.

Lema 3.2 *Seja $\phi(x)$ uma função com CSF de ordem p. Suponha que $\gamma(k)$ são os coeficientes de um esquema quase interpolador $\mathcal{I}^j u(x)$ de ordem $n \leq p$. Então a seguinte relação é válida*

$$\widetilde{\gamma}(\xi)\widetilde{\phi}_\alpha(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\xi)^{n+1}, \tag{3.13}$$

em que $\widetilde{\gamma}(\xi)$ e $\widetilde{\phi}_\alpha(\xi)$ são dados por (3.8).

Prova: Por intermédio da definição das funções $\widetilde{\gamma}(\xi)$ e $\widetilde{\phi}_\alpha(\xi)$ segue que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}(\xi)\widetilde{\phi}_\alpha(\xi) &= \widetilde{\gamma}(\xi)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\phi(k+\alpha)e^{-i\xi k} \\
&= \widetilde{\gamma}(\xi)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\phi}(\xi+2k\pi)e^{i\alpha(\xi+2k\pi)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{\gamma}(\xi+2k\pi)\widehat{\phi}(\xi+2k\pi)e^{i\alpha(\xi+2k\pi)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\Phi}(\xi+2k\pi)e^{i\alpha(\xi+2k\pi)} \\
&= \widehat{\Phi}(\xi)e^{i\alpha\xi}+\sum_{k\neq 0}\widehat{\Phi}(\xi+2k\pi)e^{i\alpha(\xi+2k\pi)} \\
&= f(\xi)+\sum_{k\neq 0}f(\xi+2k\pi),
\end{aligned}$$

em que se usa o fato de que $\widetilde{\gamma}(\xi)$ é uma função 2π-periódica e $f(\xi)=\widehat{\Phi}(\xi)e^{i\alpha\xi}$. Para $1\leq n\leq p$

$$\begin{aligned}
\frac{d^n f}{d\xi^n}(0) &= \sum_{s=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix}(i\alpha)^{n-s}\frac{d^s\widehat{\Phi}}{d\xi^s}(0) \\
&= \sum_{s=0}^{m}\begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix}(-1)^s\alpha^{n-s}\mathcal{M}_\Phi^s \\
&= \alpha^n\sum_{s=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ s \end{pmatrix}(-1)^s = 0
\end{aligned}$$

e o resultado do lema segue ■

Como comentado anteriormente, uma motivação para se adotar operadores quase interpolador no lugar de operadores interpolador baseia-se no fato de que para interpolação pode ser necessário um número infinito de coeficientes $\gamma(k)$ não nulos, enquanto que é sempre possível definir um operador de quase interpolação com um número finito deles. Por outro lado, ao contrário do esquema interpolador, operadores quase interpoladores podem não ser conservativos, propriedade esta que é muito importante para esquemas em multiescala. O conceito de projeção discreta foi introduzido por Ware [35] com a idéia de se ter um esquema conservativo, onde a discretização usa um número finito de coeficientes não nulos. Para isto é necessário a técnica de *oversampling*.

- **Esquemas de Projeção Discreta**

Aqui os operadores de discretização são do tipo

$$(\mathcal{D}_c^j u)(k)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\gamma(n)u((n+2k)2^{-j-1}).$$

Deve ser observado que a malha de pontos usada na discretização possui espaçamento 2^{-j-1}, ou seja, a metade do espaçamento usado nos esquemas anteriores.

Os coeficientes $\gamma(k)$ serão escolhidos de tal forma que o operador $\mathcal{I}^j u(x) = \mathcal{R}^j(x; \mathcal{D}_c^j u)$ seja uma projeção. Isto ocorre se o operador de discretização satisfaz

$$(\mathcal{D}_c^j \phi(2^j \cdot - l))(k) = \delta_{l-k}. \tag{3.14}$$

o que equivale a afirmar que o esquema é conservativo. Com isto tem-se a seguinte relação

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ik\xi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma(n)\phi(n/2+k) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma(2n) \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ik\xi}\phi(n+k) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma(2n+1) \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ik\xi}\phi(n+1/2+k) \\ &= \overline{\widetilde{\gamma}_P(\xi)}\widetilde{\phi}_0(\xi) + \overline{\widetilde{\gamma}_I(\xi)}\widetilde{\phi}_{1/2}(\xi), \end{aligned} \tag{3.15}$$

em que

$$\widetilde{\gamma}_P(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(2k)e^{-ik\xi} \quad \text{e} \quad \widetilde{\gamma}_I(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(2k+1)e^{-ik\xi}. \tag{3.16}$$

Observa-se que a relação (3.15) está para a projeção discreta assim como as relações (3.9) e (3.6) estão para a interpolação e quase interpolação, respectivamente.

Lema 3.3 *A fatoração (3.15) é possível com um número finito de coeficientes não nulos desde que $\widetilde{\phi}_0(\xi)$ e $\widetilde{\phi}_{1/2}(\xi)$ não tenham zeros em comum.*

Prova: É uma conseqüência do Teorema de Bezout [16]. ∎

3.2.1 Exemplos para Splines Biortogonais

Como caso de interesse, consideram-se os esquemas de aproximação definidos em termos das funções splines biortogonais apresentadas no capítulo anterior. Em todos os casos se deve assumir que $\phi(x) = \phi_{N,N^*}(x)$.

- **Interpolação**

Neste caso os coeficientes $\gamma(k)$ são escolhidos de tal forma que a condição (3.9) seja satisfeita, e para isto, a função $\phi(x)$ deve satisfazer a condição de interpolação $\widetilde{\phi}_\alpha(\xi) \neq 0,\ \forall\xi$. Como comentado no capítulo anterior, é conhecido que as funções B-splines $\phi_{N*}(x)$ satisfazem a condição de interpolação com $\alpha = 0$ no caso de N^* par, e $\alpha = 1/2$ no caso N^* ímpar. Experimentos numéricos mostram que resultados equivalentes também são válidos para as funções duais $\phi(x) = \phi_{N,N^*}(x)$. Por exemplo, a Figura 3.1 mostra $\widetilde{\phi}_\alpha(\xi)$ correspondente a $N^* = 1$ e $N = 3$. Nota-se que, para $\alpha = 0$, $\widetilde{\phi}_0(\pi) = \widetilde{\phi}_0(-\pi) = 0$ o que contraria a condição de interpolação. Por outro lado $\widetilde{\phi}_{1/2}(\xi) \neq 0$ para $-\pi \leq \xi \leq \pi$. O mesmo tipo de comportamento é verificado para outras funções escala com N ímpar, como mostram as Figuras 3.2 e 3.3. Para N par, a Figura 3.4 mostra o gráfico para $\widetilde{\phi}_0(\xi)$ para $N^* = 2$ e $N = 4, 6$. Em ambos casos tem-se que $\widetilde{\phi}_0(\xi) \neq 0$ para $-\pi \leq \xi \leq \pi$.

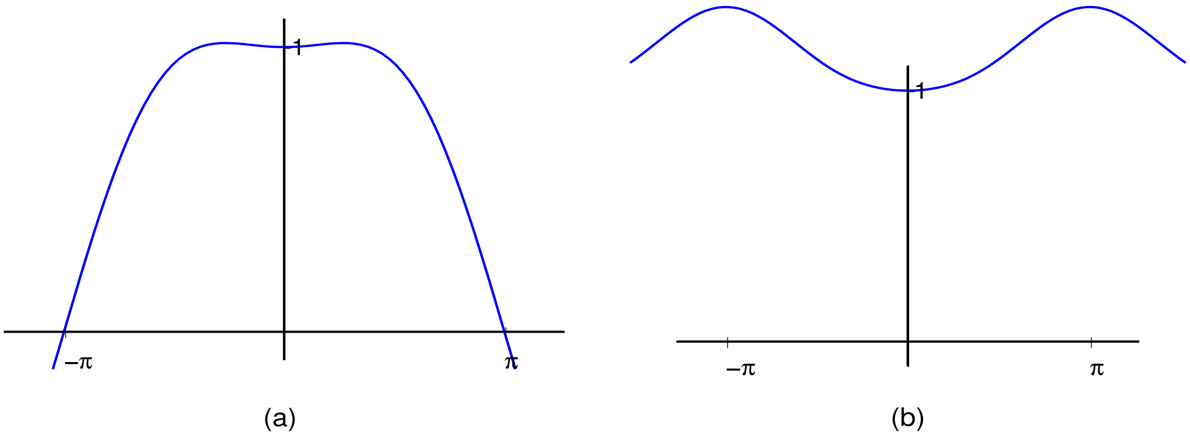


Figura 3.1: (a)-$\widetilde{\phi}_0$ e (b)- $\widetilde{\phi}_{1/2}$ para $N^* = 1$ e $N = 3$

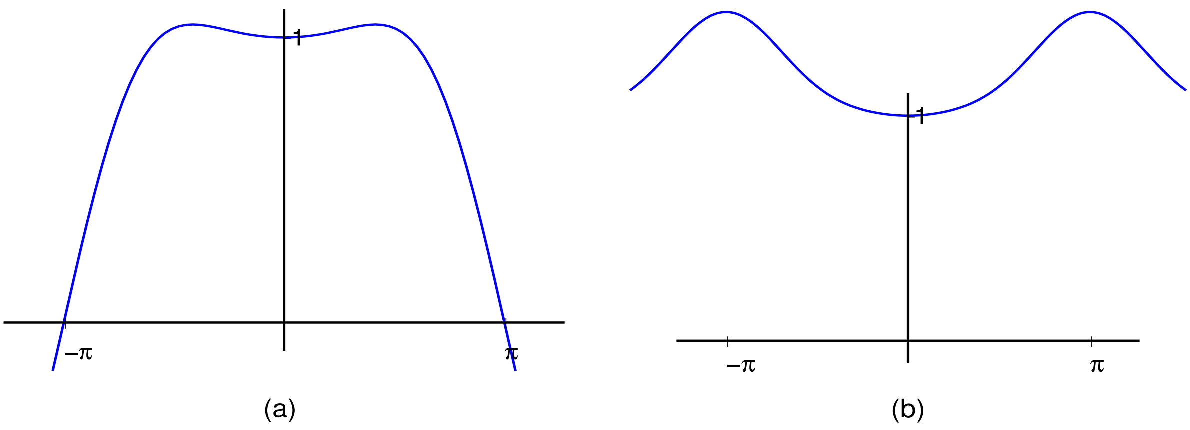


Figura 3.2: (a)-$\widetilde{\phi}_0$ e (b)- $\widetilde{\phi}_{1/2}$ para $N^* = 1$ e $N = 5$

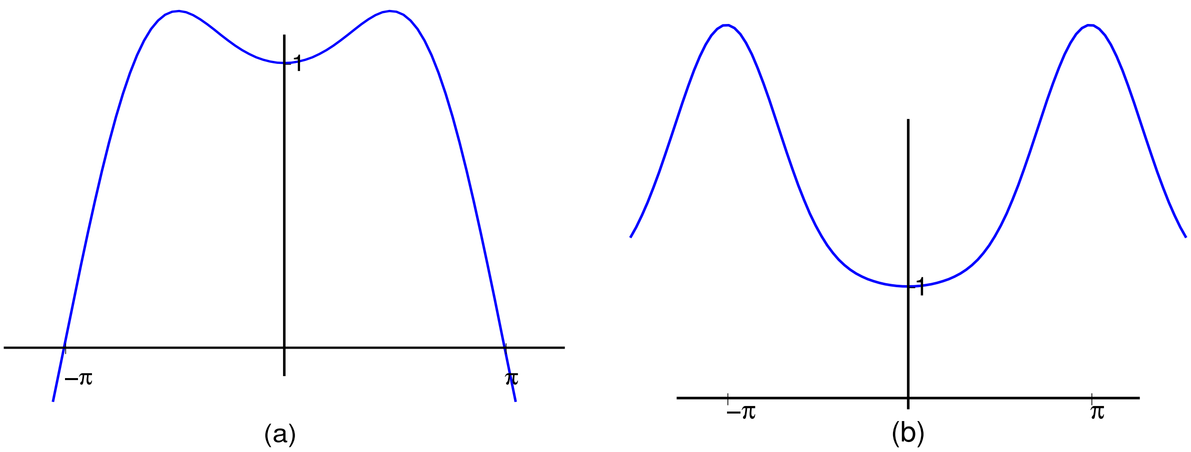


Figura 3.3: (a)-$\widetilde{\phi}_0$ e (b)- $\widetilde{\phi}_{1/2}$ para $N^* = 3$ e $N = 5$

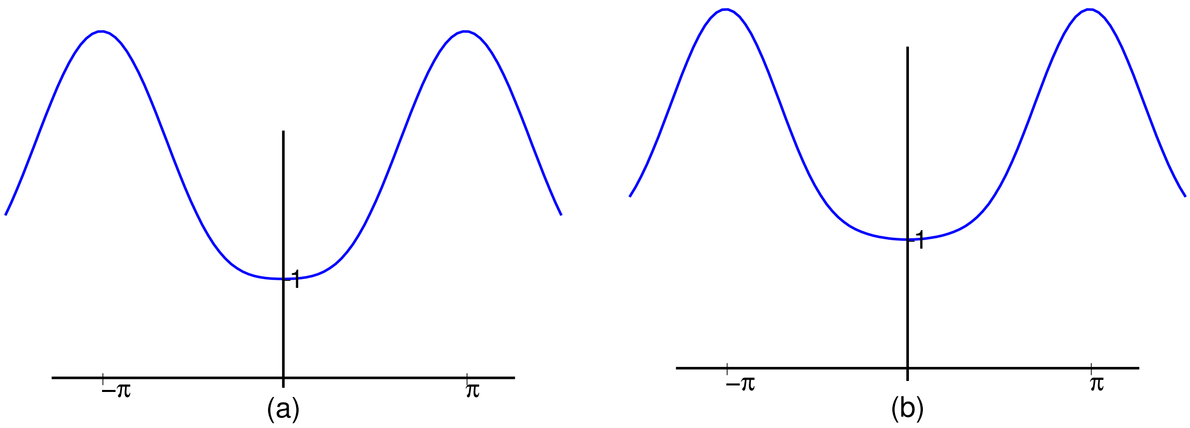


Figura 3.4: $\widetilde{\phi}_0$ para (a)- $N^* = 2, N = 4$ e (b)- $N^* = 2, N = 6$

Tabela 3.1: Interpolação: coeficientes $|\gamma(k)| \geq 10^{-6}$ e $k \geq 0$

(N^*, N)	k										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1,3)	$\frac{1181}{1339}$	$\frac{24}{379}$	$-\frac{1}{288}$	$-\frac{1}{1204}$	$-\frac{1}{35183}$	$\frac{1}{180840}$					
(1,5)	$\frac{491}{569}$	$\frac{227}{2872}$	$-\frac{7}{648}$	$-\frac{1}{6887}$	$\frac{1}{2246}$	$\frac{1}{81644}$	$-\frac{1}{114680}$				
(2,4)	$\frac{718}{1165}$	$\frac{172}{911}$	$\frac{37}{2060}$	$-\frac{9}{974}$	$-\frac{7}{1441}$	$-\frac{1}{1004}$	$\frac{1}{23306}$	$\frac{1}{10133}$	$\frac{1}{30947}$	$\frac{1}{284026}$	$-\frac{1}{706946}$
(2,6)	$\frac{427}{613}$	$\frac{151}{895}$	$-\frac{11}{1164}$	$-\frac{7}{761}$	$\frac{1}{1596}$	$\frac{1}{1028}$	$\frac{1}{9261}$	$-\frac{1}{19095}$	$-\frac{1}{80053}$	$\frac{1}{347092}$	$\frac{1}{735773}$
(3,5)	$\frac{550}{839}$	$\frac{192}{1135}$	$\frac{38}{3433}$	$-\frac{7}{1220}$	$-\frac{3}{1444}$	$-\frac{1}{3940}$	$\frac{1}{25359}$	$\frac{1}{42785}$	$\frac{1}{241570}$		

Em princípio, os coeficientes $\gamma(k)$ podem ser obtidos em termos dos coeficientes de Fourier da função $1/\widetilde{\phi}_\alpha(\xi)$. Porém, com exceção do caso $N^* = 0$, em que ϕ_{N,N^*} é uma função interpoladora de suporte compacto, tem-se um número infinito de coeficientes $\gamma(k) \neq 0$. Desta forma a implementação de $\mathcal{D}_c^j$ no espaço físico requer truncamento dos filtros [20] e o esquema deixa de ser conservativo. Na Tabela 3.2.1 apresentam-se os coeficientes $\gamma(k), k \geq 0$ para as famílias $(N^*, N) = (1,5), (2,4), (2,6), (3,5)$. Neste caso foram considerados os coeficientes de tal forma que $|\gamma(k)| \geq 10^{-6}$.

- **Quase interpolação**

Quanto maior a ordem do esquema quase interpolador, mais precisas serão as aproximações obtidas. Sendo a *CSF* da função $\phi(x)$ igual a $N-1$, do Lema 3.1 segue que o esquema quase interpolador de maior ordem que se pode obter por intermédio de $\phi(x)$ será o ordem $N-1$. Para determinar os coeficientes $\gamma(k)$, resolvem-se os sistemas lineares determinados pelas equações (3.11) e (3.10). Para isto, é necessário conhecer os momentos da função $\phi(x)$, que podem ser calculados pela fórmula recursiva (2.32). Uma vez calculados os momentos $\mathcal{M}_\phi^m$, $0 \leq m \leq N-1$, podem-se determinar facilmente os momentos μ_γ^l resolvendo o sistema (3.11), que é triangular inferior, com diagonal principal unitária. Logo, os coeficientes $\gamma(k)$ devem ser determinados pelas relações (3.10), que são do tipo Vandermonde. Cabe observar que, em princípio, podem existir infinitas soluções para estas equações, dependendo do domínio dos índices k para os quais $\gamma(k)$ não se anulam. Fixando-se este suporte de variação em $|k| \leq \lfloor (N-1)/2 \rfloor$, em que $\lfloor \cdot \rfloor$ representa a parte inteira, os coeficientes $\gamma(k)$ são unicamente determinados e resultam ser simétricos em torno de $k = 0$. Na Tabela 3.2 são apresentados os coeficientes $\gamma(k) \neq 0$, $k \geq 0$ para as famílias $N^* = 1$ com $N = 3, 5$, $N^* = 2$ com $N = 4, 6$ e para $N^* = 3$ com $N = 5, 7$.

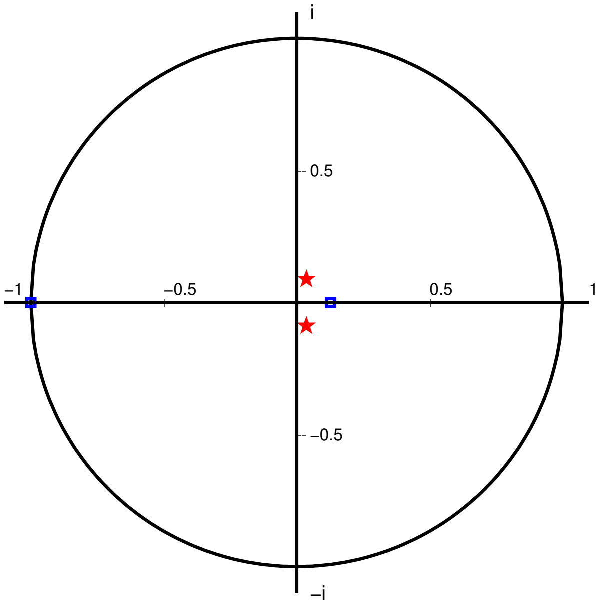
Tabela 3.2: Quase Interpolação: coeficientes $\gamma(k) \neq 0$

(N^*, N)	k			
	0	1	2	3
(1,3)	$\frac{11}{12}$	$\frac{1}{24}$		
(1,5)	$\frac{863}{960}$	$\frac{77}{1440}$	$\frac{-17}{5760}$	
(2,4)	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{12}$		
(2,6)	$\frac{97}{120}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{-1}{240}$	
(3,5)	$\frac{233}{320}$	$\frac{67}{480}$	$\frac{-7}{1920}$	
(3,7)	$\frac{173863}{241920}$	$\frac{47309}{322560}$	$\frac{-209}{32256}$	$\frac{457}{967680}$

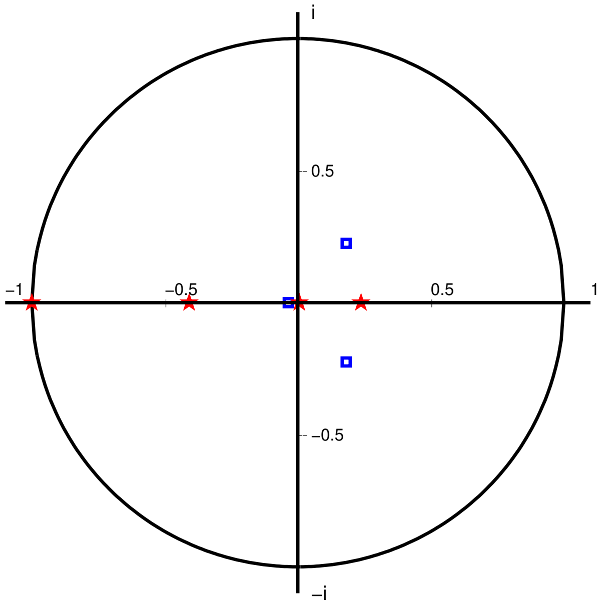
- **Projeção Discreta**

É conhecido que, no caso das B-splines $\phi^*(x) = \phi_{N^*}(x)$, $\widetilde{\phi}^*_0(\xi)$ e $\widetilde{\phi}^*_{1/2}(\xi)$ não possuem zeros em comum [14]. Este fato, ao qual se refere o Lema 3.3, é crucial na definição de operadores de projeção discreta sobre os espaços de splines V_j^*. Para definir tais operadores sobre os espaços duais V_j, deve-se verificar se tal propriedade também é verdadeira para $\phi(x) = \phi_{N,N^*}(x)$. Experimentos numéricos mostram que de fato $\widetilde{\phi}_0(\xi)$ e $\widetilde{\phi}_{1/2}(\xi)$ não possuem zeros em comum para as funções $\phi(x) = \phi_{N,N^*}(x)$ listadas na literatura. Por exemplo, na Figura 3.5 são mostrados os zeros de $\widetilde{\phi}_0$ e $\widetilde{\phi}_{1/2}(\xi)$ para as famílias $(N^*, N) = (1,3), (2,4), (3,3), (2,6)$.

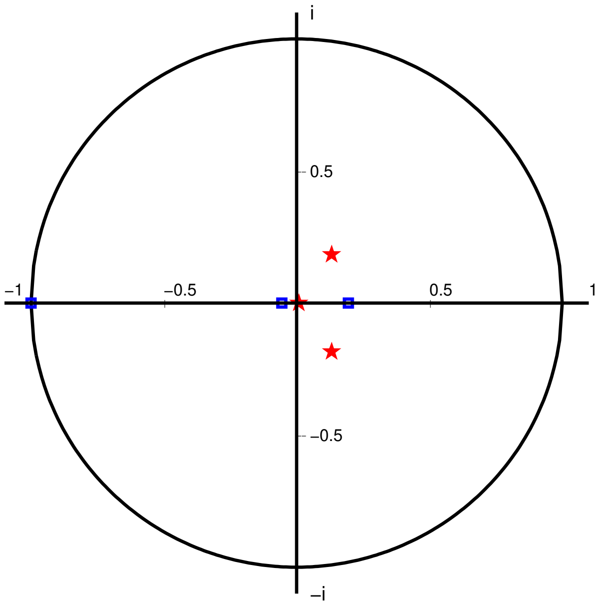
Como no caso do operador quase interpolador, o sistema (3.14), que define os coeficientes do operador de projeção discreta, pode possuir infinitas soluções, dependendo do domínio dos índices k para os quais $\gamma(k) \neq 0$. No entanto, fixando-se o número de coeficientes $\gamma(k)$ não nulos em $2|\mathrm{Supp}(\phi)| - 3$ e adotando que estes sejam simétricos em torno de $k = 0$, então a solução é única. Com este critério, na Tabela 3.3 são apresentados os coeficientes $\gamma(k)$ obtidos para alguns casos testados.



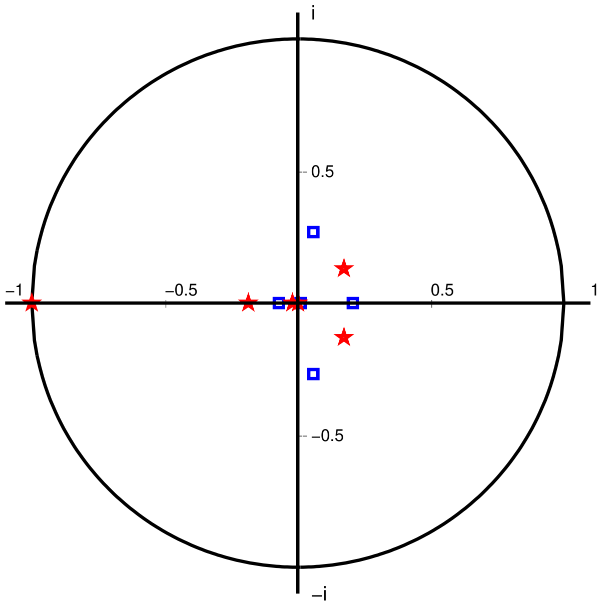
$N^* = 1$ e $N = 3$



$N^* = 2$ e $N = 4$



$N^* = 3$ e $N = 3$



$N^* = 2$ e $N = 6$

Figura 3.5: Raízes de: ($\square$) - ϕ_0; ($\star$) - $\phi_{1/2}$.

Tabela 3.3: Projeção Discreta: coeficientes $\gamma(k) \neq 0$

(N^*, N)	k							
	0	1	2	3	4	5	6	7
(1,3)	$\frac{7}{9}$	$\frac{55}{576}$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{576}$				
(1,5)	$\frac{1151}{1624}$	$\frac{107}{792}$	$\frac{142}{12067}$	$-\frac{19}{25832}$	$-\frac{27}{63649}$	$-\frac{4}{54441}$	$-\frac{7}{934226}$	$\frac{18}{107334566}$
(2,4)	$\frac{535}{1346}$	$\frac{2605}{10013}$	$\frac{231}{4475}$	$-\frac{94}{16799}$	$-\frac{33}{7450}$	$-\frac{9}{17374}$	$\frac{5}{205914}$	

3.3 Erros de Discretização e Aproximação

Nos esquemas de aproximação $\{\mathcal{D}_c^j, \mathcal{R}^j\}$ correspondentes aos operadores interpolador, quase interpolador e de projeção discreta, os operadores de discretização $\mathcal{D}_c^j$ são formas alternativas para a discretização biortogonal $\mathcal{D}^j$. Dois tipos diferentes de discretizações foram consideradas:

$$(a) \quad (\mathcal{D}_c^j u)(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma(n) u((k-n+\alpha)2^{-j});$$

$$(b) \quad (\mathcal{D}_c^j u)(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma(n) u((n+2k)2^{-j-1}).$$

Os esquemas de interpolação e quase interpolação são exemplos particulares do caso (a) e a projeção discreta é um exemplo do caso (b). A seguir é dada uma estimativa do erro de discretização $\mathcal{E}^j u = \mathcal{D}^j u - \mathcal{D}_c^j u$.

Lema 3.4 *Suponha que as funções de escalonamentos biortogonais ϕ e ϕ^* são funções integráveis de suporte compacto, e ϕ satisfaz a CSF de ordem p. Se $\mathcal{D}_c^j$ é um operador discretização associado a um esquema de interpolação, quase interpolação de ordem p, ou de projeção discreta, então para $u \in \mathbf{H}^{n+1}, n \leq p$ segue que para todo $s \in \mathbb{Z}$*

$$|(\mathcal{D}_c^j u)(s) - (\mathcal{D}^j u)(s)| \lesssim 2^{-j(n+1)} \|u\|_{\mathbf{H}^{n+1}}.$$

Prova: Em todos os casos, o erro $\mathcal{E}^j q = \mathcal{D}^j q - \mathcal{D}_c^j q$ se anula para polinômios $q \in \mathbb{P}_n, n \leq p$. Desta forma, no caso de interpolação e quase interpolação, segue que

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}^j u(s)| &= |\mathcal{E}^j (u-q)(s)| \\ &\leq \left| 2^j \int_{\mathbb{R}} (u-q)(x) \phi^*(2^j x - s) dx \right| + \left| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(k)(u-q)((s-k+\alpha)2^{-j}) \right| \\ &\lesssim \max_{x\in\Omega_{j,s}} |u-q|, \end{aligned}$$

em que $\Omega_{j,s} = \text{Supp}(\phi^*(2^j x - s)) \cup \{\bigcup_k I_{j,k}; \gamma(s-k) \neq 0\}$, com $I_{j,k} = [2^{-j}k, 2^{-j}(k+1))$. A estimativa do lema segue por intermédio do Teorema de Whitney [10], pelo qual

$$\inf_{q \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in \Omega_{j,s}} |u - q| \lesssim 2^{-j(n+1)} \|u\|_{\mathbf{H}^{n+1}(\Omega_{j,s})}.$$

Para a projeção discreta a demonstração é análoga. ■

Com relação ao erro global de aproximação, já se mostrou no Teorema 2.3 que no caso da projeção biortogonal $\mathcal{P}^j = \mathcal{R}^j \mathcal{D}^j$, definida pelo esquema de aproximação $\{\mathcal{D}^j, \mathcal{R}^j\}$,

$$||u - \mathcal{P}^j u||_{\mathbf{L}^2} \lesssim 2^{-j(p+1)} ||u||_{\mathbf{H}^{p+1}}.$$

em que p é a ordem da *CSF* da função ϕ. Em Gomes [21] foi mostrado que, sob certas condições, o erro em outros esquemas de aproximação mantém a mesma ordem. A seguir são enunciados as estimativas de [21] para os erros $u - \mathcal{I}^j u$, em que $\mathcal{I}^j = \mathcal{R}^j \mathcal{D}^j_c$ são os operadores correspondentes aos esquemas de aproximação $\{\mathcal{D}^j_c, \mathcal{R}^j\}$ descritos anteriormente.

De modo geral, consideram-se as seguintes hipóteses:

Hipótese 1: A função ϕ tem suporte compacto.

Hipótese 2: A função ϕ satisfaz a *CSF* com ordem p.

Hipótese 3: Definindo $\widetilde{\nu}(\xi) = e^{-i\alpha\xi}\widetilde{\gamma}(\xi)$ no caso (a) (interpolação e quase interpolação) e $\widetilde{\nu}(\xi) = \widetilde{\gamma}(\xi/2)$ no caso (b) (projeção discreta), então a seguinte relação de momento é válida

$$\widehat{\phi}(\xi)\widetilde{\nu}(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\xi^{p+1}).$$

Teorema 3.1 *Suponha que $\widetilde{\gamma}$ e ϕ satisfazem as Hipóteses (1)-(3). Se $u \in \mathbf{H}^{p+1}$ então a aproximação $\mathcal{I}^j u$ satisfaz a estimativa*

$$||u - \mathcal{I}^j u||_{\mathbf{L}^2} \lesssim 2^{-j(p+1)} ||u||_{\mathbf{H}^{p+1}}.$$

A demonstração deste teorema encontra-se em [21]. A seguir comenta-se este resultado para os esquemas de aproximação baseados nas funções de escalonamento $\phi = \phi_{N,N^*}$, conjugadas das B-splines ϕ_{N^*}.

Corolário 3.1 *Todos os esquemas $\mathcal{I}^j u(x)$ de interpolação, quase interpolação e projeção discreta sobre os espaços V_j, associados às funções de escalonamento $\phi_{N,N^*}(x)$, produzem erro de aproximação da ordem*

$$||u - \mathcal{I}^j u||_{\mathbf{L}^2} = \mathcal{O}(2^{-jN}),$$

quando aplicados a funções u suficientemente regulares.

Prova: Uma vez que a Hipótese 1 é verdadeira e a Hipótese 2 é verificada com $p = N - 1$, resta verificar a Hipóteses 3, o que será feito caso a caso.

- **Interpolação**

Para verificar a relação de momento da Hipótese 3, toma-se a equação (2.4) e conclue-se que

$$\begin{aligned} 1 &= \widetilde{\gamma}(\xi)\widetilde{\phi}_\alpha(\xi) \\ &= \widetilde{\gamma}(\xi)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\phi(k+\alpha)e^{-ik\xi} \\ &= \widetilde{\gamma}(\xi)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\phi}(\xi+2k\pi)e^{-i\alpha(\xi+2k\pi)} \\ &= \widetilde{\gamma}(\xi)\widehat{\phi}(\xi)e^{-i\alpha\xi}+\widetilde{\gamma}(\xi)\sum_{k\neq 0}\widehat{\phi}(\xi+2k\pi)e^{-i\alpha(\xi+2k\pi)}. \end{aligned}$$

Sendo a ordem da *CSF* da função ϕ igual a $N - 1$ segue que

$$\widehat{\phi}(\xi)e^{-i\alpha\xi}\widetilde{\gamma}(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\xi^N).$$

- **Quase Interpolação**

O Lema 3.1 implica que para esquemas de quase interpolação de ordem $n \leq N - 1$

$$\widetilde{\gamma}(\xi)\widetilde{\phi}_\alpha(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\xi^{n+1}).$$

Portanto, repetindo os cálculos feitos para o caso da interpolação, conclue-se que para o operador de quase interpolação de ordem $n = N - 1$ é válida a relação

$$\widehat{\phi}(\xi)e^{-i\alpha\xi}\widetilde{\gamma}(\xi) = 1 + \mathcal{O}(\xi^N).$$

- **Projeção Discreta**

Da equação (3.15) segue que

$$\begin{aligned} 1 &= \overline{\widetilde{\gamma}_P(\xi)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\phi(k)e^{-i\xi k}+\overline{\widetilde{\gamma}_I(\xi)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\phi(k+1/2)e^{-i\xi k} \\ &= \overline{\widetilde{\gamma}_P(\xi)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\phi}(\xi+2k\pi)+\overline{\widetilde{\gamma}_I(\xi)}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\phi}(\xi+2k\pi)e^{i/2(\xi+2k\pi)} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\phi}(\xi+2k\pi)\left(\overline{\widetilde{\gamma}_P(\xi)}+\overline{\widetilde{\gamma}_I(\xi)}e^{i(\xi/2+k\pi)}\right) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{\phi}(\xi+2k\pi)\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}}\gamma(2s)e^{is\xi}+e^{ik\pi}\sum_{s\in\mathbb{Z}}\gamma(2s+1)e^{\frac{i(2s+1)\xi}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(\xi+2k\pi)\left(\sum_{s\in\mathbb{Z}}\gamma(2s)e^{i2s(\xi/2+k\pi)}+\sum_{s\in\mathbb{Z}}\gamma(2s+1)e^{i(2s+1)(\xi/2+k\pi)}\right)\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(\xi+2k\pi)\overline{\widetilde{\gamma}(\xi/2+k\pi)}.
\end{aligned}
$$

Sendo a ordem da *CSF* de ϕ igual a $N-1$, tem-se que

$$
\widetilde{\gamma}(\xi/2)\widehat{\phi}(\xi) = 1+\mathcal{O}(\xi^N). \tag{3.17}
$$

■

3.4 Aproximações em Multinível

Como visto no Capítulo 2, no contexto de *AMrB* as funções podem ser aproximadas de duas maneiras. Por um lado, tem-se o esquema de aproximação em um único nível $\{\mathcal{D}^j, \mathcal{R}^j\}$, em que os operadores de discretização e reconstrução são expressos em termos das funções de escalonamento $\phi^*(x)$ e $\phi(x)$ do nível j. Isto é,

$$
u^j(k) = (\mathcal{D}^j u)(k) = 2^j\langle u, \phi^*(2^j\cdot - k)\rangle
$$

e

$$
\mathcal{R}^j(x;u^j) = \sum_k u^j(k)\phi(2^jx-k).
$$

Por outro lado, tem-se o esquema de aproximação em multinível $\{\mathcal{D}^j_{ME}, \mathcal{R}^j_{ME}\}$, em que a discretização $\mathcal{D}^j_{ME}$ e a reconstrução $\mathcal{R}^j_{ME}$ são expressas em termos das bases em multinível. Ou seja, tem-se a discretização

$$
\mathcal{D}^j_{ME}u = \mathbf{u}^j_{ME} = \{\mathbf{u}^J, \mathbf{d}^J, \cdots, \mathbf{d}^{j-1}\} = \{\mathcal{D}^J u, \mathcal{G}^J u, \cdots, \mathcal{G}^{j-1}u\},
$$

em que

$$
(\mathcal{G}^l u)(k) = 2^l\langle u, \psi^*(2^l\cdot - k)\rangle = \sum_{m\in\mathbb{Z}} g^*(m-2k)u^{l+1}(m). \tag{3.18}
$$

A reconstrução se expressa na forma

$$
\mathcal{R}^j_{ME}(x;u^j_{ME}) = \mathcal{R}^J(x;u^J) + \sum_{l=J}^{j-1} d^l(k)\psi(2^lx-k).
$$

Neste contexto de multinível, também podem ser visualizados outros tipos de esquemas de aproximação $\{\mathcal{D}^j_{c,ME}, \mathcal{R}^j_{ME}\}$ em que são usados outros esquemas de discretizações $\mathcal{D}^j_{c,ME} = \{\mathcal{D}^J_c, \mathcal{G}^J_c, \dots, \mathcal{G}^{j-1}_c\}$. São de interesse as discretizações definidas em termos de valores pontuais. Neste sentido, uma idéia para definir $\mathcal{G}^l_c u$ seria substituir $u^{l+1} = \mathcal{D}^{l+1}u$, na fórmula de

$\mathcal{G}^l u$, por alguma das discretizações alternativas $\mathcal{D}_c^{l+1}u$, propostas nas seções anteriores. Ou seja,

$$(\mathcal{G}_c^l u)(k) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} g^*(m-2k)(\mathcal{D}_c^{l+1}u)(m). \tag{3.19}$$

Se $\{\mathcal{D}_c^j, \mathcal{R}^j\}$ for um esquema conservativo, então resulta que

$$(\mathcal{G}_c^l \phi(2^l\cdot -m))(k) = 0, \quad (\mathcal{G}_c^l \psi(2^l\cdot -m))(k) = \delta_{m-k}. \tag{3.20}$$

Isto implica que o esquema $\{\mathcal{D}_{c,ME}^j, \mathcal{R}_{ME}^j\}$ também é conservativo.

3.4.1 Uma Discretização em Multinível Modificada

Seja $\mathcal{G}_c^l u$ a discretização definida em (3.19), em que $\mathcal{D}_c^{l+1}u$ está associado ao operador de interpolação ou à projeção discreta. Desta forma, se

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u^J(k)\phi(2^Jx-k) + \sum_{l\geq J}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d^l(k)\psi(2^lx-k),$$

então, pela propriedade de conservação (3.20),

$$(\mathcal{G}_c^\lambda u)(s) = d^\lambda(s) + \sum_{l\geq\lambda+1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d^l(k)(\mathcal{G}_c^\lambda\psi(2^l\cdot -k))(s). \tag{3.21}$$

Esta equação mostra que o erro de *aliasing* $\mathcal{G}^\lambda u - \mathcal{G}_c^\lambda u$ pode ser expandido em termos apenas de contribuições de níveis superiores $l \geq \lambda+1$. Sendo $d^\lambda(s) = (\mathcal{G}^\lambda u)(s)$, pelo Lema 3.4 segue que

$$|(\mathcal{G}_c^\lambda u)(s) - (\mathcal{G}^\lambda u)(s)| \lesssim 2^{-(\lambda+1)(p+1)}||u||_{H^{p+1}}, \tag{3.22}$$

o que não é razoável para níveis de escala menos refinados. A seguir é descrito o procedimento, que foi sugerido por Fröhlich e Schneider [20] para esquemas de interpolação e explorado por Ware [35] para a projeção discreta, que permite melhorar esta estimativa.

Se u for substituído por

$$v(x) = u(x) - \sum_{k\in\mathbb{Z}} d^\lambda(k)\psi(2^\lambda x-k),$$

obtém-se que

$$(\mathcal{G}_c^\lambda v)(s) = d^\lambda(s) + \sum_{l\geq\lambda+2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d^l(k)(\mathcal{G}_c^\lambda\psi(2^l\cdot -k))(s).$$

Desta forma, se $\check{d}^\lambda = \mathcal{G}_c^\lambda v$ for usado como aproximação para $d^\lambda = \mathcal{G}^\lambda u$, então o erro $\check{d}^\lambda - d^\lambda$ depende apenas dos coeficientes wavelet de u nas escalas $l \geq \lambda+2$, um nível acima do caso (3.21). Logo há uma melhora na ordem de precisão da estimativa (3.22). Este argumento pode ser aplicado para obter aproximações de d^λ em níveis pouco refinados, e que sejam mais precisos do que aqueles dados por $\mathcal{G}_c^\lambda u$. Ou seja, se $\check{d}^{j-1} = \mathcal{G}_c^{j-1}u$, então, para $m = 2, 3, \ldots$, define-se $\check{d}^{j-m}(s) = (\mathcal{G}_c^{j-m}v)(s)$, em que $v(x)$ é a função modificada

$$v(x) = u(x) - \sum_{n=1}^{m-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \check{d}^{j-n}(k)\psi(2^{j-n}x - k).$$

Desta forma, tem-se uma discretização em multinível

$$\check{\mathcal{D}}_{c,ME}^j u = \check{\mathbf{u}}_{ME}^j = \{\check{\mathbf{u}}^J, \check{\mathbf{d}}^J, \ldots \check{\mathbf{d}}^{j-1}\},$$

que é o resultado da aplicação do algoritmo de Análise Modificado 3.1. Adota-se a notação X^j para a malha de discretização no nível j, que é dada por $X^j = \{2^{-j}k; k \in \mathbb{Z}\}$, no caso do esquema de interpolação, ou $X^j = \{2^{-j-1}k; k \in \mathbb{Z}\}$, para o esquema de projeção discreta.
A transformada inversa é obtida pelo algoritmo de Síntese Modificado 3.2.

Algoritmo 3.1 Análise Modificada

Require: $u(x), \ x \in X^j$
  for $l = j - 1 : (-1) : J$ **do**
    $\check{\mathbf{d}}^l \leftarrow \mathcal{G}_c^l(u)$
    $u(x) \leftarrow u(x) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \check{d}^l(k)\psi(2^l x - k), \ x \in X^l$
  end for
  $\check{\mathbf{u}}^J \leftarrow \mathcal{D}_c^J(u)$
Ensure: $\check{\mathbf{u}}_{ME}^j = \{\check{\mathbf{u}}^J, \check{\mathbf{d}}^J, \ldots \check{\mathbf{d}}^{j-1}\}$

Algoritmo 3.2 Síntese Modificada

Require: $\check{\mathbf{u}}_{ME}^j = \{\check{\mathbf{u}}^J, \check{\mathbf{d}}^J, \ldots \check{\mathbf{d}}^{j-1}\}$

  $u(x) \leftarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \check{u}^J(k)\phi(2^J x - k), \ x \in X^J$
  for $l = J : 1 : j - 1$, **do**
    $u(x) \leftarrow u(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \check{d}^l(k)\psi(2^l x - k), \quad x \in X^l$
    $u(x) \leftarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \check{u}^l(k)\phi(2^l x - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \check{d}^l(k)\psi(2^l x - k), \quad x \in X^{l+1}/X^l$
    $\check{\mathbf{u}}^{l+1} \leftarrow \mathcal{D}_c^{l+1}u$
  end for
Ensure: $u(x)$, $x \in X^j$.

Como os funcionais $\mathcal{D}_c^l$ e $\mathcal{G}_c^l$ estão definidos em função de um número finito de coeficientes, em ambos algoritmos, o número total de operações é da ordem de $\sum_{l=J}^{j} \#X^l$. A seguir é feita uma estimativa do erro de *aliasing*. Em Ware [35] esta estimativa é provada para o caso da projeção discreta, com poucos detalhes, sendo que alguns pontos não estão claros. A prova que segue, esclarece estes pontos e aplica-se aos casos de Interpolação e Quase Interpolação.

Teorema 3.2 *Seja* $\check{\mathbf{u}}^j_{ME} = \{\check{\mathbf{u}}^J, \check{\mathbf{d}}^J, \dots \check{\mathbf{d}}^{j-1}\}$ *a análise de multirresolução de u gerada pelo Algoritmo 3.1. Se $u \in \mathbf{H}^{p+1}$, em que p é a ordem da CSF da função ϕ, e $\alpha > 0$, então vale a seguinte estimativa para o erro de aliasing*

$$||\mathbf{u}^j_{ME} - \check{\mathbf{u}}^j_{ME}||_\infty \lesssim 2^{-j(p+1-\alpha)}||u||_{\mathbf{H}^{p+1}}.$$

<u>Prova</u>: Por definição, tem-se que

$$\check{d}^{j-m}(s) = (\mathcal{G}_c^{j-m}u)(s) - \sum_{n=1}^{m-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \check{d}^{j-n}(k)(\mathcal{G}_c^{j-m}\psi(2^{j-n}\cdot -k))(s). \tag{3.23}$$

Considerando a representação de $u(x)$ dada por

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u^{j-m}(k)\phi(2^{j-m}x-k) + \sum_{l\geq j-m}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d^l(k)\psi(2^l x - k),$$

segue que para $m = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}\check{d}^{j-m}(s) \quad &= \quad d^{j-m}(s) + \sum_{n=1}^{m-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}[d^{j-n}(k) - \check{d}^{j-n}(k)](\mathcal{G}_c^{j-m}\psi(2^{j-n}\cdot -k))(s) + \\ &\sum_{l\geq j}\sum_{k\in\mathbb{Z}} d^l(k)(\mathcal{G}_c^{j-m}\psi(2^l\cdot -k))(s).\end{aligned} \tag{3.24}$$

Assim, para $m = 2$ tem-se que

$$\begin{aligned}\left|\check{d}^{j-2}(s) - d^{j-2}(s)\right| \quad &\leq \quad \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|d^{j-1}(k) - \check{d}^{j-1}(k)\right|\ \left|(\mathcal{G}_c^{j-2}\psi(2^{j-1}\cdot -k))(s)\right| + \\ &\sum_{l\geq j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|d^l(k)(\mathcal{G}_c^{j-2}\psi(2^l\cdot -k))(s)\right|.\end{aligned}$$

Observa-se que os conjuntos $F_s^{\lambda,l} = \{k \in \mathbb{Z}; (\mathcal{G}_c^{\lambda}\psi(2^l\cdot -k))(s) \neq 0\}$ possuem apenas um número finito de elementos, tendo em vista o suporte finito do filtro g^*. Portanto, o primeiro somatório envolve um número finito de termos não nulos e este pode ser estimado por intermédio de (3.22), obtendo

$$\sum_{k\in F_s^{j-2,j-1}}\left|d^{j-1}(k) - \check{d}^{j-1}(k)\right|\ \left|(\mathcal{G}_c^{j-2}\psi(2^{j-1}\cdot -k))(s)\right| \lesssim 2^{-j(p+1)}\|u\|_{\mathbf{H}^{p+1}}.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz no segundo somatório, e combinando com a estimativa (2.26), segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{l\geq j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|d^l(k)(\mathcal{G}_c^{j-2}\psi(2^l\cdot -k))(s)\right| &\leq \sum_{l\geq j}\left\{\sum_{k\in F_s^{j-2,l}}[d^l(k)]^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k\in F_s^{j-2,l}}[(\mathcal{G}_c^{j-2}\psi(2^l\cdot -k))(s)]^2\right\}^{1/2}\\
&\lesssim \sum_{l\geq j}\left[\sum_{k\in F_s^{j-2,l}} 2^{-2l(p+1)}\|u\|^2_{\mathbf{H}^{p+1}(\mathrm{Supp}(\psi^*_{l,k}))}\right]^{1/2}\\
&\lesssim 2^{-j(p+1)}\|u\|_{\mathbf{H}^{p+1}}\sum_{l\geq j}2^{(j-l)(p+1)}\\
&\lesssim 2^{-j(p+1)}\|u\|_{\mathbf{H}^{p+1}}. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Desta forma, segue que

$$\left|\check{d}^{j-2}(s)-d^{j-2}(s)\right|\lesssim 2\,2^{-j(p+1)}\|u\|_{\mathbf{H}^{p+1}}.$$

Da mesma forma, pode-se mostrar que para $m=3,4,\ldots$

$$\left|\check{d}^{j-m}(s)-d^{j-m}(s)\right|\lesssim\left(1+\sum_{n=1}^{m-1}n\right)\,2^{-j(p+1)}\|u\|_{\mathbf{H}^{p+1}}.$$

Esta estimativa mostra a dependência do erro em relação ao nível, com o aparecimento de um fator da ordem $O(\log 2^m)^2$. Desta forma, tendo em vista que para $\alpha>0$ a função $x^{-\alpha}(\log x)^2$ é limitada em $[1,\infty)$, segue que

$$\begin{aligned}
\left|\check{d}^{j-m}(s)-d^{j-m}(s)\right| &\lesssim (\log 2^j)^2\,2^{-j(p+1)}\|u\|_{\mathbf{H}^{p+1}}\\
&= 2^{-j\alpha}(\log 2^j)^2\,2^{-j(p+1-\alpha)}\|u\|_{\mathbf{H}^{p+1}}\\
&\lesssim 2^{-j(p+1-\alpha)}\|u\|_{\mathbf{H}^{p+1}}. \qquad (3.26)
\end{aligned}$$

No nível menos refinado, tem-se que

$$\check{u}^J(s)=(\mathcal{D}_c^J u)(s)-\sum_{n=1}^{j-J}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\check{d}^{j-n}(k)(\mathcal{D}_c^J\psi(2^{j-n}\cdot -k))(s).$$

Considerando a representação de $u(x)$ dada por

$$u(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}u^J(k)\phi(2^Jx-k)+\sum_{l\geq J}\sum_{k\in\mathbb{Z}}d^l(k)\psi(2^lx-k),$$

segue que

$$\check{u}^J(s)=u^J(s)-\sum_{m=1}^{j-J}\sum_{k\in\mathbb{Z}}[\check{d}^{j-m}(k)-d^{j-m}(k)](\mathcal{D}_c^J\psi(2^{j-m}\cdot -k))(s)+\sum_{l\geq j}\sum_{k\in\mathbb{Z}}d^l(k)(\mathcal{D}_c^J\psi(2^l\cdot -k))(s).$$

O segundo somatório do lado direito da fórmula acima pode ser estimado de forma análoga ao caso da equação (3.25). No primeiro somatório, aplica-se a estimativa (3.26), e procedendo como no caso do erro de aliasing nos coeficientes wavelet, conclue-se que

$$\left|\breve{u}^J(s) - u^J(s)\right| \lesssim 2^{-j(p+1-\alpha)}\|u\|_{\mathbf{H}^{p+1}}.$$

■

Como observação final, cabe notar que, comparando o resultado do Teorema 3.2 com a estimativa obtida em (3.22), conclue-se que os coeficientes obtidos pelo algoritmo de Análise Modificado apresentam melhor ordem de precisão do que os coeficientes obtidos pelo algoritmo de Análise usual (Algoritmo 2.1).

3.4.2 Os Coeficientes em uma Base Lacunar de Wavelets

A estimativa (2.26) mostra que a grandeza dos coeficientes $d^l(k)$ está relacionada com a suavidade da função u no suporte de $\psi^*_{j,k}$. Desta forma, uma função u que possui singularidades isoladas, poderá ter uma representação esparsa em multinível. Em certas aplicações uma informação a priori pode ser usada para determinar o conjunto de índices dos coeficientes $d^l(k)$ de grandeza significativa, isto é, $F_l = \{k; |d^j(k)|$ é significativo$\}$. Estes conjuntos de índices determinam uma base lacunar

$$\{\phi_{J,k}; k \in \mathbb{Z}\} \bigcup_{l=J}^{j-1} \{\psi_{l,k}; k \in F_l\},$$

sobre a qual a expansão da função u tem o número de termos reduzido de forma significativa.

Neste contexto, o Algoritmo 3.1 é facilmente adaptado [20, 35]. Para isto, basta substituir X^l pelo conjunto de pontos $X^l_a = \{2^{-l}n; n \in F_{a,l}\}$, em que $F_{a,l}$ é o conjunto de índices dos pontos de X^l necessários para o cálculo de $(\mathcal{G}^l_c u)(k),\ k \in F_l$. Desde que o funcional $\mathcal{G}^l_c$ está definido em função de um número finito de coeficientes, o número de operações em cada passo do Algoritmo 3.1 é da ordem de $\#F_{a,l}$. Assim o número total de operações, executado pelo Algoritmo 3.1, é reduzido para a ordem de $\sum_{l=J}^{j} \#F_{a,l}$.

3.4.3 A Importância da Propriedade de Conservação

A propriedade de conservação, que permite obter a expressão (3.21) para o erro de *aliasing*, é fundamental para o bom desempenho do Algoritmo 3.1. No caso em que o esquema não é conservativo, não se tem garantia de que as relações (3.20) sejam válidas e desta forma uma equação da forma (3.21) não pode ser obtida. Este é o caso de um operador de quase interpolação não conservativo, para o qual não se pode esperar a mesma performance dos esquemas de projeção discreta e interpolação. Para verificar este fato, é feita uma comparação do desempenho do algoritmo quando aplicado aos modos de Fourier.

Primeiramente, considera-se o esquema de quase interpolação. Para $m \geq 1$, os operadores de discretização $\mathcal{D}^{j-m}_c$ e $\mathcal{G}^{j-m}_c$ aplicados ao modo de Fourier $u(x) = e^{-i\eta x}$ fornecem como resultado

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}_c^{j-m}u)(s) &= e^{-i2^m zs}\overline{\widetilde{\gamma}(2^m z)},\\ (\mathcal{G}_c^{j-m}u)(s) &= e^{-i2^m zs}S_1(2^{m-1}z),\end{aligned}$$

em que $z = 2^{-j}\eta$, $S_1(z) = G^*(z)\overline{\widetilde{\gamma}(z)}$ com $G^*(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g^*(n)e^{-inz}$. A cada iteração m do Algoritmo 3.1 , a função u é modificada e os coeficientes $\check{d}^{j-m}(s)$ são calculados sobre esta nova função, sendo que

$$\check{d}^{j-m}(s) = (\mathcal{G}_c^{j-m}u)(s) - \sum_{n=1}^{m-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \check{d}^{j-n}(k)(\mathcal{G}_c^{j-m}\psi(2^{j-n}\cdot -k))(s). \tag{3.27}$$

Em geral, para $\lambda + 1 \leq \kappa$ tem-se que

$$\mathcal{G}_c^{\lambda}(\psi(2^{\kappa}\cdot -k))(s) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} g^*(l-2s)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\gamma(n)\psi(2^{\kappa-\lambda-1}(l-n+\alpha)-k). \tag{3.28}$$

Tomando $m = 1$ em (3.27) segue que

$$\check{d}^{j-1}(s) = \mathcal{G}_c^{j-1}(u)(s) = e^{-i2zs}S_1(z).$$

Por intermédio dos resultados obtidos em (3.27) e (3.28), para $m = 2$ tem-se

$$\begin{aligned}\check{d}^{j-2}(s) &= \mathcal{G}_c^{j-2}(u)(s) - \sum_{k\in\mathbb{Z}}\check{d}^{j-1}(k)(\mathcal{G}_c^{j-2}\psi(2^{j-1}\cdot -k))(s)\\ &= e^{-i4zs}S_1(2z)\left[1 - S_1(z)\overline{\widetilde{\psi}(2z)}\right]\\ &= e^{-i4sk}S_2(z),\end{aligned}$$

em que $\widetilde{\psi}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-isz}\psi(k)$. Aplicando novamente este procedimento para $m = 3, 4, \ldots$, obtém-se

$$\check{d}^{j-m}(s) = e^{-i2^m zs}S_m(z),$$

em que $S_m(z)$ são calculados de modo iterativo por

$$S_m(z) = S_1(2^{m-1}z)\left\{1 - \left[\sum_{n=1}^{m-1} S_n(z)\overline{\widetilde{\psi}(2^n z)}\right]\right\}, \quad \text{com} \quad S_1 = G^*(z)\overline{\widetilde{\gamma}(z)}.$$

Para a projeção discreta os cálculos são análogos, em cujo caso a fórmula iterativa é dada por

$$S_m(z) = S_1(2^{m-1}z)\left\{1 - \left[\sum_{n=1}^{m-2} S_n(z)\overline{\widetilde{\psi}(2^n z)}\right]\right\} - S_{m-1}(z)T(2^{m-1}z),\ \ m > 2, \tag{3.29}$$

em que

$$\begin{aligned}
S_1(z) &= G^*(z)\overline{\widetilde{\gamma}(z/2)},\\
S_2(z) &= S_1(2z) - S_1(z)T(2z),\\
T(z) &= \widetilde{G}^*(z)\left[\widetilde{\gamma}_P(z)\overline{\widetilde{\psi}(z)} + \widetilde{\gamma}_I(z)\overline{\widetilde{\psi}_{1/2}(z)}\right].
\end{aligned}$$

Comparando com os respectivos coeficientes wavelets exatos $d^{j-m}(k) = e^{-i2^{j-m}kz}\widehat{\psi}^*(2^m z)$, o erro resultante, em ambos os casos, satisfaz

$$\begin{aligned}
e^m(k) &= |\check{d}^{j-m}(k) - d^{j-m}(k)|\\
&= |e^{-i2^m zk}|\ |G^*(2^m z)\widehat{\phi}^*(2^m z) - S_m(z)|\\
&\sim c(m)z^{2N}.
\end{aligned}$$

O comportamento do termo $c(m)$ foi testado numericamente para as famílias $(2,4)$ e $(2,6)$. O que se observa é que os termos mantém um crescimento do tipo $c_{PD}(m) = 2^{Nm}$, para a projeção discreta, e $c_{QI}(m) = 2^{2Nm}$, para a quase interpolação, como apresentado na Figura 3.6. Pode-se ainda observar que para o esquema de quase interpolação a precisão dos coeficientes modificados $\check{d}^{j-m}$ é pior ainda do que a dos coeficientes $d_c^{j-m} = \mathcal{G}_c^{j-m}u$.

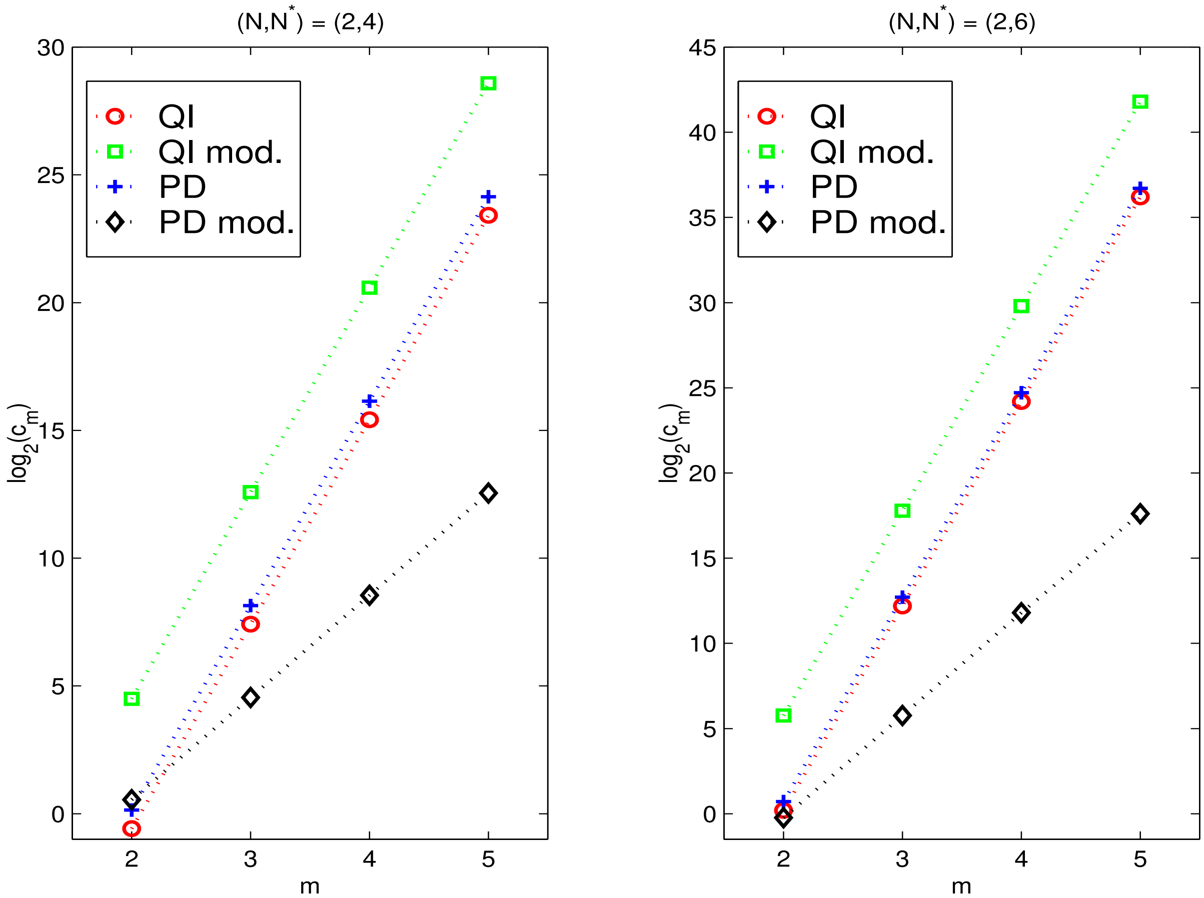


Figura 3.6: Fator de crescimento do erro de aliasing aplicado aos modos de Fourier

Capítulo 4

Discretização de Operadores Diferenciais

Este capítulo é dedicado à análise de discretizações $\mathcal{L}^j$ de operadores diferenciais $\mathcal{L}$ no contexto de análise de multirresolução biortogonal. São considerados dois tipos de operadores, o caso linear, $\mathcal{L}(u) = \frac{d^m u}{dx^m}$, e o caso bilinear, $\mathcal{L}(u, v) = uv_x$.

Usando os conceitos de operador de discretização e de operador de reconstrução, introduzidos no capítulo anterior, descreve-se uma formulação geral que une várias estratégias de aproximação. Esta metodologia foi proposta por Cullen e Morton [13] com o objetivo de generalizar o conceito do erro de truncamento usado em diferentes esquemas.

De um modo geral, os esquemas do tipo Galerkin ou Petrov-Galerkin apresentam dificuldades de implementação computacional de termos não lineares. Por esta razão, é usual adotar estratégias híbridas na solução de problemas não lineares. Por exemplo, este é o caso dos chamados esquemas pseudo-espectrais, em que os termos lineares são calculados no domínio de Fourier enquanto que os termos não lineares são calculados no domínio físico. Em análise wavelet, esquemas similares, chamados de pseudo-wavelets, têm sido adotados [6, 10, 20, 27]. Estas formulações híbridas calculam os termos não lineares no espaço físico usando funcionais definidos em termos de valores pontuais, o que facilita a implementação computacional. Os casos, aqui analisados, estão associados aos operadores de interpolação, quase interpolação e projeção discreta, descritos no capítulo anterior.

O objetivo da presente análise é estabelecer a consistência de uma dada discretização $\mathcal{L}^j$ por intermédio da ordem do erro de truncamento. No caso bilinear $\mathcal{L}^j(u, v)$, é apresentada uma precisa descrição da interação entre os diferentes modos de Fourier para os diferentes esquemas analisados. Nos esquemas do tipo Petrov-Galerkin ocorre a chamada superconvergência, isto é, a ordem do erro de truncamento é maior que a ordem de aproximação permitida pelos espaços aproximantes. Para os diferentes esquemas híbridos, independentemente da escolha dos operadores de aproximação, mostra-se que a ordem do erro de truncamento é sempre aquela permitida pela ordem de aproximação dos espaços aproximantes, não ocorrendo a superconvergência. Alguns exemplos são testados numericamente com o objetivo de obter as constantes assintóticas da expansão do erro de truncamento.

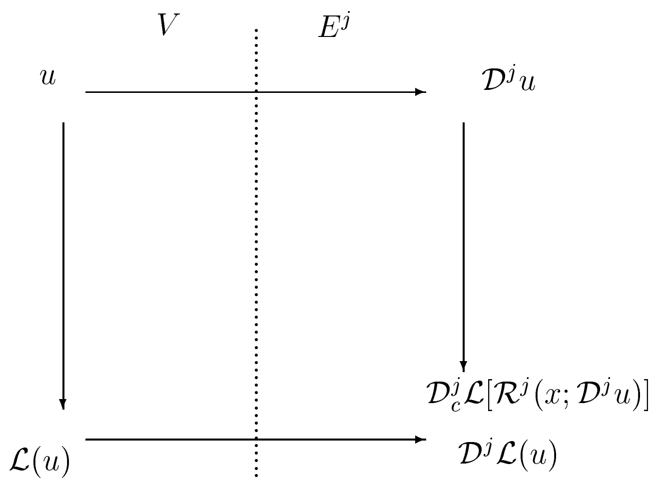


Figura 4.1: Diagrama do erro de truncamento

4.1 Formulação Geral

Para operadores diferenciais $\mathcal{L}(u)$ ou $\mathcal{L}(u, v)$ consideram-se discretizações da forma

$$\mathcal{L}(u) \sim \mathcal{L}^j(\mathbf{u}^j) = \mathcal{D}_c^j\left[\mathcal{L}(\mathcal{R}^j(x;\mathbf{u}^j))\right], \tag{4.1}$$
$$\mathcal{L}(u,v) \sim \mathcal{L}^j(\mathbf{u}^j,\mathbf{v}^j) = \mathcal{D}_c^j\left[\mathcal{L}(\mathcal{R}^j(x;\mathbf{u}^j),\mathcal{R}^j(x;\mathbf{v}^j))\right]. \tag{4.2}$$

No caso em que $\mathbf{u}^j = \mathcal{D}^j u$ e $\mathcal{R}^j(x; \mathbf{u}^j)$ são definidos pelas fórmulas (3.3) e $\mathcal{D}_c^j = \mathcal{D}^j$, o esquema é do tipo Petrov-Galerkin puro. A estratégia de usar formulações híbridas, com dois tipos diferentes de discretizações $\mathcal{D}_c^j \neq \mathcal{D}^j$, é de especial interesse no caso de operadores não lineares. Três destas formulações híbridas são apresentadas, de tal forma que se distinguem pelas diferentes escolhas do operador de discretização $\mathcal{D}_c^j$.

Sejam os erros de truncamento,

$$ET(u) = \mathcal{D}^j\mathcal{L}(u) - \mathcal{L}^j(\mathbf{u}^j), \tag{4.3}$$
$$ET(u,v) = \mathcal{D}^j\mathcal{L}(u,v) - \mathcal{L}^j(\mathbf{u}^j,\mathbf{v}^j). \tag{4.4}$$

Estes podem ser interpretados como a diferença entre seguir o caminho de primeiro discretizar as funções e depois aplicar $\mathcal{L}^j$ e o outro caminho de primeiro aplicar $\mathcal{L}$ seguido da discretização $\mathcal{D}^j$. O diagrama da Figura 4.1 ilustra este procedimento.

O propósito desta análise é estabelecer a consistência da discretização $\mathcal{L}^j$, obtendo a ordem do erro de truncamento. Para esta análise, considera-se os operadores $\mathcal{L}(u) = \frac{d^m u}{dx^m}$ e $\mathcal{L}(u, v) = uv_x$, sendo que para outros operadores o procedimento é análogo. As técnicas da análise de Fourier são apropriadas para este estudo [13, 22, 27]. Neste sentido, o entendimento das iterações entre os modos de Fourier é um passo importante que deve ser analisado. Desta forma, a análise é concentrada em funções da forma $u(x) = e^{-i\eta x}$, em que $\eta \in \mathbb{R}$.

4.2 Esquemas do tipo Petrov-Galerkin

Nesta seção é feita a análise dos esquemas do tipo Petrov-Galerkin. Considera-se o caso em que $\mathcal{D}_c^j = \mathcal{D}^j$ e os operadores de discretização e reconstrução são dados por (3.3), com ênfase nas aplicações baseadas nas splines biortogonais $\phi(x) = \phi_{N,N^*}(x)$ e $\phi^*(x) = \phi_{N^*}(x)$.

4.2.1 Caso $\mathcal{L}(u) = u_x$

Neste caso

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}^j \mathbf{u}^j)(s) &= \mathcal{D}^j \mathcal{L}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} u^j(k)\phi(2^j \cdot -k)\right)(s) \\
&= 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} u^j(k) \int_{\mathbb{R}} \phi^*(y)\frac{d\phi}{dx}(y+s-k)dy \\
&= 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} u^j(k)\beta(s-k), \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

em que

$$\beta(k) = \int_{\mathbb{R}} \phi^*(y)\frac{d\phi}{dx}(y+k)dy. \qquad (4.6)$$

Nota-se que a integral acima é a derivada em $x = k$ da função interpoladora θ_M, definida em (2.37). Isto é,

$$\beta(k) = \frac{d\theta_M}{dx}(k).$$

Logo, mantendo $M = N^* + N$ fixo, os valores dos coeficientes $\beta(k)$ são independentes da escolha de N^* e N.

É importante o entendimento da aplicação de $\mathcal{L}^j$ nos modos de Fourier. Desta forma, considera-se $u(x) = e^{-i\eta x}, \eta \in \mathbb{R}$. Com isto segue que

$$u^j(k) = 2^j \int_{\mathbb{R}} e^{-i\eta x}\phi^*(2^j x - k)dx = e^{-i2^{-j}\eta k}\widehat{\phi}^*(2^{-j}\eta).$$

Substituindo em (4.5), obtém-se

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}^j \mathbf{u}^j)(s) &= 2^j \widehat{\phi}^*(2^{-j}\eta)e^{-i2^{-j}\eta s}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i2^{-j}\eta k}\beta(k) \\
&= \frac{\eta}{z}\widehat{\phi}^*(z)e^{-izs}\overline{\widetilde{\beta}(z)}, \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

em que $\widetilde{\beta}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta(k)e^{-i\xi k}$ e $z = 2^{-j}\eta$.

Por outro lado, no cálculo de $(\mathcal{D}^j\mathcal{L}(u))(s)$ obtém-se

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}^j\mathcal{L}(u))(s) &= 2^j\int_{\mathbb{R}} -i\eta e^{-i\eta x}\phi^*(2^jx-s)dx \\ &= -i\eta e^{-izs}\widehat{\phi}^*(z). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Conseqüentemente, o erro de truncamento, definido em (4.3), possui a seguinte forma

$$(ET)\,(s) = -i\eta e^{-izs}\widehat{\phi}^*(z)\left(1-\frac{i}{z}\overline{\widetilde{\beta}(z)}\right) = -i\eta e^{-izs}\Lambda(z). \tag{4.9}$$

Por esta representação, a ordem do erro de truncamento para $z\sim 0$ é determinada pela ordem do zero do símbolo Λ em $z\sim 0$, como estabelecido no seguinte teorema.

Teorema 4.1 *Para todos os casos em que $N+N^*=M$, o símbolo Λ em (4.9) satisfaz*

$$\Lambda(z)\sim\sum_{n=M/2}^{\infty} C_{2n}z^{2n}.$$

O coeficiente diretor $C_M = C_M(M)$ é o mesmo em todos os casos, mas os coeficientes dos demais termos podem depender das diferentes escolhas de N e N^*.

Prova: Dada a fórmula

$$\Lambda(z) = \widehat{\phi}^*(z)\left[1-\frac{i}{z}\overline{\widetilde{\beta}(z)}\right], \tag{4.10}$$

e visto que $\widehat{\phi}^*(z)$ é uma função par e $\tilde{\beta}(z)$ é uma função ímpar, segue que $\Lambda(z)$ é uma função par. Portanto, em sua série de Taylor em torno de $z=0$ somente aparecem os termos de ordem par. Primeiro analisa-se o termo entre colchetes, que é sempre o mesmo, para qualquer das possíveis combinações de N e N^*. Usando a fórmula do somatório de Poisson e propriedades da transformada de Fourier, obtém-se a expressão

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}(z) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta(k)e^{-izk} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ikz}\int_{\mathbb{R}}\phi^*(x)\frac{d\phi}{dx}(x+k)dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-ikz}\frac{d\theta_M}{dx}(k) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{d\widehat{\theta}_M}{dx}(z+2k\pi) \\ &= i\sum_{k\in\mathbb{Z}}(z+2k\pi)\widehat{\theta}_M(z+2k\pi). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Seja $f_k(z) = (z+2k\pi)\widehat{\theta}_M(z+2k\pi) + (z-2k\pi)\widehat{\theta}_M(z-2k\pi)(z)$ de tal maneira que

$$\widetilde{\beta}(z) = i\left\{ z\widehat{\theta}_M(z) + \sum_{k\geq 1} f_k(z) \right\}.$$

Sendo a ordem da *CSF* de θ_M igual a $M-1$, segue que, para $k \geq 1$,

$$\frac{d^n f_k}{dz^n}(0) = 0, \qquad 0 \leq n \leq M-1.$$

Combinando este resultado com (2.43), segue que

$$1 - \frac{i}{z}\overline{\widetilde{\beta}(z)} = C_M z^M + O(z^{M+2}).$$

O primeiro termo $\widehat{\phi}^*(z) = \widehat{\phi}_{N^*}(z)$ depende da particular escolha de N^*. Mas, em todos os casos, $\widehat{\phi}^*(z)$ é uma função suave e limitada, com $\widehat{\phi}^*(0) = 1$. Com isto, conclue-se a demonstração do teorema. ■

A seguir são apresentados alguns resultados numéricos com o objetivo de determinar as constantes assintóticas C_M. Lembrando que

$$\beta(k) = \frac{d\theta_M}{dx}(k),$$

pode-se aplicar o procedimento descrito na seção 2.5 para calcular estes valores. Pela simetria de θ_M, segue que $\beta(-k) = -\beta(k)$. Na Tabela 4.1 são apresentados os valores de $\beta(k) \neq 0$ para $k > 0$ e $M = 4, 6, 8$.

Tabela 4.1: Valores dos $\beta(k)$ para $k > 0$

M	k					
	1	2	3	4	5	6
4	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$				
6	$-\frac{272}{365}$	$\frac{53}{365}$	$-\frac{16}{1095}$	$-\frac{1}{2920}$		
8	$-\frac{1747}{2203}$	$\frac{1483}{7724}$	$-\frac{399}{11882}$	$\frac{73}{32823}$	$\frac{128}{743295}$	$-\frac{1}{1189272}$

Por intermédio da expressão

$$\widetilde{\beta}(z) = -2i\sum_{k\geq 1}\beta(k)\text{sen}(kz),$$

Tabela 4.2: Termo Diretor em $\Lambda(z)$

M	$C_M z^M$
4	$\frac{1}{30}z^4$
6	$\frac{4}{511}z^6$
8	$\frac{122}{63711}z^8$

obtém-se a expansão do símbolo $\widetilde{\beta}(z)$ utilizando o software *Mathematica*®, obtendo assim os termos diretor da expansão. Os resultados são apresentados na Tabela 4.2.

Para o método de Galerkin, usando funções lineares por partes, [13], vale

$$\Lambda(z) \sim \frac{1}{180}z^4,$$

sendo a constante assintótica menor do que do esquema de Petrov-Galerkin de mesma ordem.

4.2.2 Operadores de Ordem Superior

Considera-se o operador diferencial

$$\mathcal{L}(u) = \frac{d^m u}{dx^m}, \quad m > 1,$$

e escolhe-se M de tal forma que θ_M tenha uma regularidade compatível com a ordem do operador. Seguindo o mesmo raciocínio, obtém-se

$$(ET)\,(s) = (-i\eta)^m e^{-izs}\Lambda(z),$$

sendo o símbolo $\Lambda(z)$ da forma

$$\Lambda(z) = \widehat{\phi}^*(z)\left(1 - \frac{i^m}{z^m}\overline{\widetilde{\beta}^{(m)}(z)}\right),$$

em que $\widetilde{\beta}^{(m)}(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta^{(m)}(k)e^{-ikz}$ com

$$\beta^{(m)}(k) = \frac{d^m\theta_M}{dx^m}(k).$$

Analogamente, resulta que

$$\begin{aligned}\widetilde{\beta}^{(m)}(z) &= i^m \sum_{k\in\mathbb{Z}} (z+2k\pi)^m \widehat{\theta}_M(z+2k\pi) \\ &= i^m \left\{ z^m \widehat{\theta}_M(z) + \sum_{k\geq 1} f_k(z) \right\},\end{aligned}$$

em que $f_k(z) = (z+2k\pi)^m \widehat{\theta}_M(z+2k\pi) + (z-2k\pi)^m \widehat{\theta}_M(z-2k\pi)$. A *CSF* da função θ_M garante que

$$\frac{d^n f_k}{dz^n}(0) = 0, \quad \text{para} \quad 0 \leq n \leq M-1.$$

Além do mais, se m for ímpar, as funções $\widetilde{\beta}^{(m)}(z)$ resultam ser anti-simétricas, o que faz com que todas as derivadas de ordem par em $z=0$ sejam nulas. Analogamente, se m for par todas as derivadas de ordem ímpar são nulas em $z=0$. Portanto, vale a expansão assintótica

$$\Lambda(z) \sim \sum_{n=M/2}^{\infty} C_{2n} z^{2n-m+\alpha}, \tag{4.12}$$

em que $\alpha = 0$ se m for par e $\alpha = 1$ se m for ímpar.

Estes resultados podem ser facilmente aplicados para funções $u(x)$ suficientemente regulares. Sendo representadas pela série de Fourier

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(k) e^{ikx},$$

utiliza-se a expansão (4.12) para obter o seguinte comportamento para o erro de truncamento

$$\begin{aligned}(ET)(s) &\sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(k)(ik)^m e^{iks2^{-j}} \overline{\Lambda(2^{-j}k)} \\ &\sim \sum_{n=M/2}^{\infty} C_{2n} 2^{-j(2n-m+\alpha)} i^{2n-m+\alpha} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(k)(ik)^{2n+\alpha} e^{iks2^{-j}} \\ &\sim \sum_{n=M/2}^{\infty} C_{2n} 2^{-j(2n-m+\alpha)} i^{2n-m+\alpha} \frac{d^{2n+\alpha}u}{dx^{2n+\alpha}}(2^{-j}s),\end{aligned}$$

em que $\alpha = 0$ se m for par ou $\alpha = 1$ se m for ímpar. Resumem-se esses comentários no seguinte corolário.

Corolário 4.1 *Suponha que a função $u(x)$ seja suficientemente regular para garantir a convergência da série acima. Então o erro de truncamento satisfaz*

$$|ET| = \mathcal{O}(2^{-j(M-m+\alpha)}),$$

em que $\alpha = 0$ se m for par ou $\alpha = 1$ se m for ímpar.

4.2.3 Advecção Bilinear $\mathcal{L}(u,v) = uv_x$

Considera-se o termo de advecção bilinear da forma $\mathcal{L}(u,v) = uv_x$. Dados os valores discretos $\mathbf{u}^j$ e $\mathbf{v}^j$, o cálculo de $\mathcal{L}^j(\mathbf{u}^j, \mathbf{v}^j)$ envolve uma primeira etapa que consiste em aplicar o operador diferencial $\mathcal{L}$ na reconstrução de $\mathbf{u}^j$ e $\mathbf{v}^j$. Ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathcal{R}^j(x;\mathbf{u}^j), \mathcal{R}^j(x;\mathbf{v}^j)) &= \mathcal{L}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} u^j(m)\phi(2^jx-m), \sum_{n\in\mathbb{Z}} v^j(n)\phi(2^jx-n)\right)\\ &= 2^j \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} u^j(m)v^j(n)\phi(2^jx-m)\frac{d\phi}{dx}(2^jx-n). \qquad (4.13)\end{aligned}$$

A seguir, pela aplicação do operador de discretização $\mathcal{D}^j$ obtém-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^j(\mathbf{u}^j, \mathbf{v}^j)(s) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} u^j(m)v^j(n)\int_{\mathbb{R}} \phi^*(y)\phi(y+s-m)\frac{d\phi}{dy}(y+s-n)dy\\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} u^j(m)v^j(n)\lambda(s-m, s-n), \qquad (4.14)\end{aligned}$$

em que

$$\lambda(m,n) = \lambda_{N,N^*}(m,n) = \int_{\mathbb{R}} \phi^*(y)\phi(y+m)\frac{d\phi}{dy}(y+n)dy. \qquad (4.15)$$

Ao contrário dos casos lineares analisados anteriormente, os valores dos coeficientes $\lambda(m,n)$ variam de acordo com as diferentes escolhas de N e N^*.

Considerando os modos de Fourier $u(x) = e^{-i\eta x}$ e $v(x) = e^{-i\xi x}$ segue que

$$u^j(m) = e^{-i2^{-j}\eta m}\widehat{\phi}^*(2^{-j}\eta),$$

$$v^j(n) = e^{-i2^{-j}\xi n}\widehat{\phi}^*(2^{-j}\xi).$$

Assim o operador discreto tem a seguinte forma

$$\mathcal{L}^j(u^j, v^j)(s) = e^{-is(w+z)}\widehat{\phi}^*(w)\widehat{\phi}^*(z)\overline{\widetilde{\lambda}(w,z)}, \qquad (4.16)$$

em que $w = 2^{-j}\eta$, $z = 2^{-j}\xi$ e

$$\widetilde{\lambda}(w,z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-imw}e^{-inz}\lambda(m,n).$$

Por outro lado,

$$(\mathcal{D}^j\mathcal{L}(u,v))(s) = -i\xi e^{-is(w+z)}\widehat{\phi}^*(w+z). \qquad (4.17)$$

Substituindo (4.17) e (4.16) na equação do erro de truncamento (4.4) segue que

$$(ET)(s) = -i\xi e^{-is(w+z)}\left[\widehat{\phi}^*(w+z) - \frac{i}{z}\widehat{\phi}^*(w)\widehat{\phi}^*(z)\overline{\widetilde{\lambda}(w,z)}\right] = -i\xi e^{-is(w+z)}\Lambda(w,z).$$

A ordem do erro de truncamento depende do comportamento do símbolo

$$\Lambda(w,z) = \widehat{\phi}^*(w+z) - \frac{i}{z}\widehat{\phi}^*(w)\widehat{\phi}^*(z)\overline{\widetilde{\lambda}(w,z)}, \tag{4.18}$$

como especificado no seguinte teorema.

Teorema 4.2 *Seja $M = N + N^*$ em que $N \geq N^*$. O símbolo $\Lambda(w,z)$ em (4.18) satisfaz*

$$\Lambda(w,z) \sim \sum_{m=0}^{M-1} \mathcal{O}(w^m z^{M-m}).$$

Prova: A demonstração é análoga à do Teorema 4.1. Expressando $\widetilde{\lambda}(w,z)$ por intermédio da fórmula do somatório de Poisson, obtém-se que

$$\widetilde{\lambda}(w,z) = i \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} (z+2n\pi)\widehat{\phi}(w+2m\pi)\ \widehat{\phi}(z+2n\pi)\overline{\widehat{\phi}^*(w+z+2(m+n)\pi)}. \tag{4.19}$$

A propriedade de simetria das funções ϕ e ϕ^* permite representar

$$\phi(x) = \varphi(x-\alpha), \quad \phi^*(x) = \varphi^*(x-\alpha)$$

em termos de funções φ e φ^*, simétricas em torno de $x = 0$, em que $\alpha = 0$ para N e N^* pares, e $\alpha = 1/2$ para N e N^* ímpares. As transformadas de Fourier $\widehat{\varphi}(\xi)$ e $\widehat{\varphi}^*(\xi)$ são funções reais e valem as seguintes relações

$$\widehat{\phi}(\xi) = e^{-i\xi\alpha}\widehat{\varphi}(\xi), \quad \widehat{\phi}^*(\xi) = e^{-i\xi\alpha}\widehat{\varphi}^*(\xi).$$

Conseqüentemente,

$$\widetilde{\lambda}(w,z) = i \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} (z+2n\pi)\widehat{\varphi}(w+2m\pi)\ \widehat{\varphi}(z+2n\pi)\widehat{\varphi}^*(w+z+2(m+n)\pi).$$

O somatório acima pode ser desmembrado em quatro somatórios da seguinte forma,

$$\widetilde{\lambda}(w,z) = \overbrace{\sum_{m=-n} [\ \ ]}^{\text{(I)}} + \overbrace{\sum_{\substack{m=0\\ n\neq 0}} [\ \ ]}^{\text{(II)}} + \overbrace{\sum_{\substack{m\neq 0\\ n=0}} [\ \ ]}^{\text{(III)}} + \overbrace{\sum_{\substack{m\neq 0, n\neq 0\\ m\neq -n}} [\ \ ]}^{\text{(IV)}}.$$

Na análise do comportamento de cada um dos termos, usam-se basicamente a ordem da *CSF*, a relação de biortogonalidade e a simetria das funções φ e φ^*. Observa-se que as funções φ e φ^* satisfazem a *CSF* com a mesma ordem de ϕ e ϕ^*.

No primeiro termo tem-se

$$(\mathrm{I}) = -i\widehat{\varphi}^*(w+z)\left[z\widehat{\varphi}(z)\ \widehat{\varphi}(w) + \sum_{m\neq 0}(z-2m\pi)\widehat{\varphi}(z-2m\pi)\ \widehat{\varphi}(w+2m\pi)\right].$$

Para $m \geq 1$, seja $f_m(w,z) = (z-2m\pi)q_m(w,z) + (z+2m\pi)q_{-m}(w,z)$, em que $q_m(w,z) = \widehat{\varphi}(w+2m\pi)\ \widehat{\varphi}(z-2m\pi)$, de tal forma que

$$(I) = -i\widehat{\varphi}^*(w+z)\left[z\widehat{\varphi}(z)\ \widehat{\varphi}(w) + \sum_{m\geq 1} f_m(w,z)\right].$$

Levando em consideração que

$$\frac{\partial^k q_m}{\partial w^l \partial z^{k-l}}(0,0) = \frac{d^l\widehat{\varphi}}{dw^l}(2m\pi)\frac{d^{k-l}\widehat{\varphi}}{dz^{k-l}}(-2m\pi),$$

e tendo em vista a *CSF* da função φ, conclue-se que as derivadas parciais das funções $q_m(w,z)$ se anulam em $(0,0)$ sempre que $0 \leq l \leq N-1$ ou $0 \leq k-l \leq N-1$. Em particular, isto acontece para todas as derivadas parciais de ordem $k \leq 2N-1$ ou de ordem superior, em que $l = k$. Como conseqüência, também segue que

$$\frac{\partial^k f_m}{\partial w^l \partial z^{k-l}}(0,0) = 0,$$

se $0 \leq k \leq 2N-1$ ou $l = k$. Além disto, a simetria de φ faz com que as funções $f_m(w,z)$ sejam anti-simétricas em torno do ponto $(0,0)$, isto é, $f_m(-w,-z) = -f_m(w,z)$. Desta forma, todas as derivadas parciais de $f_m(w,z)$ com ordem par se anulam em $(0,0)$.

Dos resultados acima, e do Lema 2.2, conclue-se que

$$\frac{-i}{z}\widehat{\varphi}^*(w)\widehat{\varphi}^*(z)(I) = -\widehat{\varphi}^*(w+z) + \sum_{m=0}^{2N-1}\mathcal{O}(w^m z^{2N-m}). \tag{4.20}$$

No segundo termo tem-se

$$(\mathrm{II}) \ = -i\widehat{\varphi}(w)\sum_{n\neq 0}(z+2\pi m)\widehat{\varphi}(z+2\pi n)\ \widehat{\varphi}^*(z+w+2\pi n).$$

Neste caso, considera-se $q_m(w,z) = \widehat{\varphi}(z+2m\pi)\widehat{\varphi}^*(z+w+2m\pi)$ e definindo $f_m(w,z)$ como no caso anterior, obtém-se que

$$(II) = -i\widehat{\varphi}(w)\ \sum_{m\geq 1} f_m(w,z).$$

Sendo

$$\frac{\partial^k q_m}{\partial w^l \partial z^{k-l}}(0,0) = \sum_{m=0}^{k-l}\left(\begin{array}{c} k-l \\ m \end{array}\right)\frac{d^m\widehat{\varphi}}{dz^m}(2m\pi)\frac{\partial^{k-m}\widehat{\varphi}^*}{\partial w^l \partial z^{k-l-m}}(2m\pi),$$

a *CSF* das funções φ e φ^* implicam que todas as derivadas parciais de $q_m(w,z)$ com ordem $k \leq M-1$ se anulam em $(0,0)$. O mesmo ocorre com as derivadas parciais de ordem superior em que $l = k$. Isto, em combinação com a anti-simetria de $f_m(w,z)$ e com o Lema 2.2, implicam que

$$\frac{-i}{z}\widehat{\varphi}^*(w)\widehat{\varphi}^*(z)(II) = \sum_{m=0}^{M-1} \mathcal{O}(w^m z^{M-m}). \tag{4.21}$$

No terceiro termo tem-se

$$\text{(III)} = -iz\ \widehat{\varphi}(z) \sum_{m\neq 0} \widehat{\varphi}(w+2m\pi)\widehat{\varphi}^*(z+w+2m\pi).$$

Neste caso, considera-se que $f_m(w,z) = \widehat{\varphi}(w+2m\pi)\widehat{\varphi}^*(z+w+2m\pi)$, então

$$(III) = -iz\ \widehat{\varphi}(z) \sum_{m\neq 0} f_m(w,z).$$

Como nos casos anteriores, segue que para $k \leq M-1$

$$\frac{\partial^n f_k}{\partial w^l \partial z^l}(0,0) = 0.$$

Portanto

$$\frac{-i}{z}\widehat{\varphi}^*(w)\widehat{\varphi}^*(z)(III) = \sum_{m=0}^{M-1} \mathcal{O}(w^m z^{M-m}). \tag{4.22}$$

No quarto termo tem-se

$$\text{(IV)} = -i \sum_{\substack{m,n\neq 0 \\ m\neq -n}} (z+2n\pi)\widehat{\varphi}(z+2n\pi)\ \widehat{\varphi}(w+2m\pi)\ \widehat{\varphi}^*(z+w+2(n+m)\pi).$$

Considera-se a função $f_{m,n}(w,z) = (z+2m\pi)\ q_{m,n}(w,z)\ +\ (z-2m\pi)\ q_{-m,-n}(w,z)$, em que $q_{m,n}(w,z) = \widehat{\varphi}(w+2n\pi)\widehat{\varphi}(z+2m\pi)\widehat{\varphi}^*(z+w+2(m+n)\pi)$, de tal forma que

$$(IV) = -i \sum_{\substack{m,n>1 \\ m\neq n}} f_{m,n}(w,z).$$

Pela ordem da *CSF* de φ e φ^* e pela anti-simetria de $f_{m,n}(w,z)$, segue que para $0 \leq k \leq N^* + 2N$

$$\frac{\partial^k f_{m,n}}{\partial w^l \partial z^{k-l}}(0,0) = 0.$$

Portanto

$$\frac{-i}{z}\widehat{\varphi}^*(w)\widehat{\varphi}^*(z)(IV) = \sum_{m=0}^{N^*+2N-1} \mathcal{O}(w^m z^{N^*+2N-m}), \tag{4.23}$$

o que resulta em termos de ordem superior à dos casos anteriores. Somando as contribuições dos termos (4.20), (4.21), (4.22) e (4.23) em (4.18), completa-se a prova do Teorema. ■

Cabe observar que, apesar da fórmula acima ser explicitamente apresentada como sendo dependente somente de M, as constantes assintóticas dependerão da escolha de N e N^*. Isto será comprovado nos exemplos numéricos ao final desta Seção.

Com o objetivo de obter as constantes assintóticas do símbolo Λ, resultados numéricos são apresentados. Para obter numericamente os resultado desta seção é necessário o cálculo de $\lambda(m,n)$ que, ao contrário do caso linear, agora depende da particular escolha de N e N^*.

Substituindo as relações de escala em (4.15) resulta que os coeficientes $\lambda(m,n)$ satisfazem o seguinte problema de autovalor

$$\lambda(m,n) = 8\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\alpha(2m-k,2n-l)\lambda(n,m), \tag{4.24}$$

em que $\alpha(k,l)$ depende dos coeficientes dos filtros H e H^* da seguinte maneira

$$\alpha(k,l) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} h^*(s)h(s+k)h(s+l).$$

Como no caso linear, faz-se necessário um critério de normalização, que é dado no seguinte lema

Lema 4.1 *Os coeficientes $\lambda(m,n)$ definidos em (4.15) satisfazem*

(i) $\forall m,n\in\mathbb{Z},\ \lambda(-m,-n) = -\lambda(m,n)$.

(ii) $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} m\lambda(m,n) = 0.$

(iii) $\displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\lambda(m,n) = -1.$

Prova: (i)- Sabe-se que as funções ϕ e ϕ^* são simétricas, em torno de $\alpha=0$ para N par e em torno de $\alpha=1/2$ para N ímpar. Logo a derivada de ϕ é anti-simétrica em torno de α. Da equação (4.15) segue que

$$\begin{aligned}
\lambda(-m,-n) &= \int_{\mathbb{R}} \phi^*(y)\phi(y-m)\frac{d\phi}{dy}(y-n)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi^*(-x+\alpha)\phi(-x+\alpha-m)\frac{d\phi}{dx}(-x+\alpha-n)dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \phi^*(x-\alpha)\phi(x-\alpha+m)\frac{d\phi}{dx}(x-\alpha+n)dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \phi^*(y)\phi(y+m)\frac{d\phi}{dy}(y+n)dy \\
&= -\lambda(m,n).
\end{aligned}$$

(ii)- Pela definição de $\lambda(m,n)$ tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} m\lambda(m,n) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} m\int_{\mathbb{R}} \phi^*(y)\phi(y+m)\frac{d\phi}{dy}(y+n)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi^*(y)\sum_{m\in\mathbb{Z}} m\phi(y+m)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{d\phi}{dy}(y+n)dy \\
&= 0,
\end{aligned}$$

em que a última passagem se deve ao fato de que $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\phi(y+n)=1$.

(iii)- Neste caso tem-se que

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\lambda(m,n) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\int_{\mathbb{R}} \phi^*(y)\phi(y+m)\frac{d\phi}{dy}(y+n)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi^*(y)\sum_{m\in\mathbb{Z}} \phi(y+m)\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\frac{d\phi}{dx}(y+n)dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \phi^*(y)dy = -1,
\end{aligned}$$

em que se usa o resultado $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\frac{d\phi}{dx}(y+n)=-1$, obtido no Lema 2.1. ■

Fazendo uso da expansão

$$\begin{aligned}
\widetilde{\lambda}(w,z) &= -2i\left[\sum_{m\geq 1,n\geq 1}\lambda(m,n)\mathrm{sen}(wm+zn)+\sum_{m\geq 1,n\geq 1}\lambda(m,-n)\mathrm{sen}(wm-zn)+\right. \\
&\qquad \left.\sum_{n\geq 1}\lambda(0,n)\mathrm{sen}(zn)+\sum_{m\geq 1}\lambda(m,0)\mathrm{sen}(wm)\right],
\end{aligned}$$

que é uma conseqüência da propriedade de anti-simetria dos coeficientes λ, obtém-se os resultados numéricos descritos a seguir.

No caso em que $N^*=0$, tem-se que $\phi^*(x)=\delta(x)$ e, conseqüentemente, $\lambda(m,n)$ é dado por

$$\lambda(m,n)=\theta_M(m)\frac{d\theta_M}{dx}(n)=\begin{cases}\dfrac{d\theta_M}{dx}(n)=\beta(n) & m=0,\\ 0 & m\neq 0.\end{cases}$$

Logo $\widetilde{\lambda}(w,z)=\widetilde{\beta}(z)$ e $\widehat{\phi}^*(\xi)\equiv 1$, o que implica que o erro de truncamento tem a seguinte forma

$$(ET)_s=-i\xi e^{-is(w+z)}\left(1-\frac{i}{z}\overline{\widetilde{\beta}(z)}\right).$$

Sendo assim, vale a mesma estimativa do caso linear dada na Tabela 4.2.

No caso em que $N^* = 1$, tem-se que

$$\widehat{\phi}^*(\xi) = e^{-i\xi/2}\frac{\text{sen}(\xi/2)}{\xi/2}. \tag{4.25}$$

Usando o software *Mathematica*®, obtém-se os valores de $\lambda(p,q)$ resolvendo o problema de autovalor em (4.24) para $N = 3, 5$. Em todos os casos estudados foram detectados auto-espaços de dimensão 2, sendo no entanto possível determinar unicamente o autovetor que satisfaz as condições de normalização descritas no Lema 4.1. Com isto seguem os seguintes resultados:

- $N^* = 1$, $N = 3$
  Neste caso $\lambda(n,m) \neq 0$ para $-2 \leq n \leq 2$ e $-2 \leq m \leq 2$. A Tabela 4.3 apresenta os valores de $\lambda(m,n) \neq 0$ para $m \geq 0$, visto que para $m < 0$ basta observar que $\lambda(m,n) = -\lambda(-m,-n)$.

Tabela 4.3: Valores de $\lambda(m,n)$ para $N^* = 1$ e $N = 3$

m	n				
	-2	-1	0	1	2
0	$-\frac{11}{180}$	$\frac{28}{45}$			
1	$\frac{1}{90}$	$-\frac{31}{270}$	$\frac{7}{30}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{27}$
2	$\frac{1}{4320}$	$\frac{1}{240}$	$-\frac{1}{80}$	$\frac{5}{432}$	$-\frac{1}{288}$

Fazendo uso do software *Mathematica*®, para expandir $\Lambda(w,z)$ em série de Taylor, obtém-se que os primeiros termos são

$$\Lambda(w,z) \sim \frac{1}{30}z^4 + \frac{1}{30}z^3w + \frac{1}{80}z^2w^2 - \frac{1}{80}zw^3.$$

Este resultado pode ser comparado com os obtidos por Cullen-Morton [13] para o método de Galerkin usando funções lineares por partes, para o qual resulta que

$$\Lambda(w,z) \sim \frac{1}{180}z^4 + \frac{1}{90}z^3w + \frac{7}{720}z^2w^2 - \frac{1}{360}zw^3.$$

Observa-se que as constantes são menores que no caso do esquema de Petrov-Galerkin de mesma ordem.

Tabela 4.4: Valores de $\lambda(m,n)$ para $N^* = 1$ e $N = 5$

m	n								
	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
0	$\frac{20}{89267}$	$\frac{314}{29267}$	$-\frac{395}{3003}$	$\frac{611}{837}$					
1	$-\frac{10}{190967}$	$-\frac{40}{13383}$	$\frac{369}{11429}$	$-\frac{768}{4751}$	$\frac{466}{1715}$	$-\frac{2281}{12630}$	$\frac{265}{5374}$	$-\frac{46}{5879}$	$-\frac{8}{39923}$
2	$\frac{1}{151618}$	$\frac{11}{37150}$	$-\frac{201}{44792}$	$\frac{245}{9993}$	$-\frac{181}{4285}$	$\frac{40}{1387}$	$-\frac{171}{20428}$	$\frac{76}{54335}$	$\frac{3}{73456}$
3		$\frac{8}{212103}$	$\frac{1}{35896}$	$-\frac{17}{20471}$	$\frac{3}{1721}$	$-\frac{45}{31771}$	$\frac{30}{54131}$	$-\frac{19}{170011}$	$-\frac{1}{223264}$
4			$\frac{1}{678343}$	$-\frac{1}{128891}$	$\frac{1}{74371}$	$-\frac{2}{195791}$	$\frac{1}{265548}$		

- $N^* = 1$, $N = 5$
  Neste caso os $\lambda(m,n) \neq 0$ para $-4 \leq m \leq 4$ e $-4 \leq n \leq 4$. A Tabela 4.4 apresenta os valores de $\lambda(m,n) \neq 0$ para $m \geq 0$. Segue que

$$\Lambda(w,z) \quad \sim \quad \frac{4}{511}z^6 + \frac{4}{511}z^5 w + \frac{5}{2016}z^4 w^2 - \frac{5}{2016}z w^5.$$

4.3 Formulações Híbridas

De modo geral, esquemas do tipo Galerkin ou Petrov-Galerkin não fornecem estratégias eficientes para os termos não lineares. Por esta razão, são usuais estratégias híbridas na solução de problemas não lineares. Por exemplo, este é o caso dos chamados esquemas pseudo-espectrais em que os termos lineares são calculados no domínio de Fourier enquanto que os termos não lineares são calculados no domínio físico. Em análise wavelet, esquemas similares, chamados de pseudo-wavelets, têm sido adotados [6, 10, 20, 27]. Estas formulações híbridas calculam os termos não lineares no espaço físico usando funcionais definidos em termos de valores pontuais. Os casos, aqui analisados, estão associados a operadores de interpolação, quase interpolação e projeção discreta para splines biortogonais, como descritos na Seção 3.2.1. O objetivo é dar uma formulação comum para estes métodos e ter uma esquema geral para a análise do erro de truncamento.

- **Esquema de Interpolação e Quase Interpolação**

Em ambos os casos, a discretização é do tipo

$$(\mathcal{D}_c^j u)(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma(n) u((k-n+\alpha)2^{-j}), \tag{4.26}$$

em que $0 \leq \alpha < 1$. A correspondente discretização $\mathcal{L}^j(u^j, v^j)$ de $\mathcal{L}(u,v)$, definida em (4.2), é dada por

$$\mathcal{L}^j(u^j, v^j)(s) = 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(k) \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} u^j(m) v^j(n) \phi(s-k+\alpha-m) \frac{d\phi}{dx}(s-k+\alpha-n). \tag{4.27}$$

Consideram-se os modos de Fourier $u(x) = e^{-i\eta x}$ e $v(x) = e^{-i\zeta x}$, para os quais tem-se $u^j(m) = e^{-iwm}\ \widehat{\phi}^*(w)$ e $v^j(n) = e^{-izn}\widehat{\phi}^*(z)$, em que $w = 2^{-j}\eta$ e $z = 2^{-j}\zeta$. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^j(u^j, v^j)(s) &= 2^j \widehat{\phi}^*(z)\widehat{\phi}^*(w) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(k) \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-iwm} \phi(s-k+\alpha-m) \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-izn} \frac{d\phi}{dx}(s-k+\alpha-n) \\
&= 2^j \widehat{\phi}^*(z)\widehat{\phi}^*(w) e^{-is(z+w)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik(z+w)} \gamma(k) \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{iwm} \phi(m+\alpha) \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{izn} \frac{d\phi}{dx}(n+\alpha) \\
&= 2^j \widehat{\phi}^*(z)\widehat{\phi}^*(w) e^{-is(z+w)} \overline{\widetilde{\gamma}(z+w)}\ \overline{\widetilde{\phi}_\alpha(w)}\ \overline{\widetilde{\beta}_\alpha(z)},
\end{aligned} \tag{4.28}$$

em que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-i\xi k} \gamma(k), && (4.29) \\
\widetilde{\phi}_\alpha(\xi) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-i\xi m} \phi(m+\alpha), && (4.30) \\
\widetilde{\beta}_\alpha(\xi) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-i\xi n} \frac{d\phi}{dx}(n+\alpha). && (4.31)
\end{aligned}$$

Desta forma, resulta que o erro de truncamento tem a seguinte forma

$$(ET)(s) = -i\zeta e^{-is(w+z)} \left[\widehat{\phi}^*(w+z) - \frac{i}{z} \widehat{\phi}^*(w)\widehat{\phi}^*(z) \overline{\widetilde{\phi}_\alpha(w)}\ \ \overline{\widetilde{\beta}_\alpha(z)}\ \ \overline{\widetilde{\gamma}(w+z)} \right]. \tag{4.32}$$

- **Esquemas de Projeção Discreta**

Neste caso, consideram-se os operadores de discretização do tipo

$$(\mathcal{D}_c^j u)(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma(n) u((n+2k)2^{-j-1})$$

e os modos de Fourier $u(x) = e^{-i\eta x}$ e $v(x) = e^{-i\zeta x}$, para os quais $u^j(m) = e^{-iwm}\widehat{\phi}^*(w)$ e $v^j(n) = e^{-izn}\widehat{\phi}^*(z)$, em que $w = 2^{-j}\eta$ e $z = 2^{-j}\zeta$. Então, segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^j(u^j, v^j)(s) &= 2^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(k) \sum_{m\in\mathbb{Z}} u^j(m)\phi(k/2+s-m) \sum_{n\in\mathbb{Z}} v^j(n)\frac{d\phi}{dx}(k/2+s-n) \\
&= 2^j \widehat{\phi}^*(z)\widehat{\phi}^*(w) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(k) \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-iwm}\phi(k/2+s-m) \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-izn}\frac{d\phi}{dx}(k/2+s-n) \\
&= 2^j \widehat{\phi}^*(z)\widehat{\phi}^*(w) \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(2k) \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-iwm}\phi(k+s-m) \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-izn}\frac{d\phi}{dx}(k+s-n) \right. \\
&+ \left. \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(2k+1) \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-iwm}\phi(k+s-m+1/2) \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-izn}\frac{d\phi}{dx}(k+s-n+1/2) \right] \\
&= 2^j \widehat{\phi}^*(z)\widehat{\phi}^*(w) e^{-is(w+z)} \left[\widetilde{\gamma}_P(w+z)\overline{\widetilde{\phi}_0(w)}\ \overline{\widetilde{\beta}_0(w)} + \widetilde{\gamma}_I(w+z)\overline{\widetilde{\phi}_{1/2}(w)}\ \overline{\widetilde{\beta}_{1/2}(w)} \right] \\
&= 2^j \widehat{\phi}^*(z)\widehat{\phi}^*(w) e^{-is(w+z)} \overline{\widetilde{\Gamma}(w,z)}, \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

em que, $\widetilde{\gamma}_P(\xi)$ e $\widetilde{\gamma}_I(\xi)$ são definidos por (3.16) e

$$\widetilde{\Gamma}(w,z) = \overline{\widetilde{\gamma}_P(w+z)}\ \widetilde{\phi}_0(w)\widetilde{\beta}_0(z) + \overline{\widetilde{\gamma}_I(w+z)}\ \widetilde{\phi}_{1/2}\widetilde{\beta}_{1/2}(z).$$

Desta forma, o esquema de projeção discreta apresenta o erro de truncamento na seguinte forma

$$(ET)(s) = -i\zeta e^{-is(w+z)} \left[\widehat{\phi}^*(w+z) - \frac{i}{z}\widehat{\phi}^*(w)\widehat{\phi}^*(z)\overline{\widetilde{\Gamma}(w,z)} \right]. \qquad (4.34)$$

4.3.1 Análise do Erro de Truncamento

Em todas as formulações consideradas, o erro de truncamento para os modos de Fourier tem a forma geral

$$(ET)(s) = -i\zeta e^{-is(w+z)}\Lambda(w,z),$$

em que

$$\Lambda(w,z) = \widehat{\phi}^*(w+z) - \frac{i}{z}\widehat{\phi}^*(w)\widehat{\phi}^*(z)\overline{\widetilde{\phi}_\alpha(w)}\ \ \overline{\widetilde{\beta}_\alpha(z)}\ \ \overline{\widetilde{\gamma}(w+z)},$$

no caso de interpolação e quase-interpolação, e

$$\Lambda(w,z) = \widehat{\phi}^*(w+z) - \frac{i}{z}\widehat{\phi}^*(w)\widehat{\phi}^*(z)\widetilde{\Gamma}(w,z)$$

no caso da projeção discreta. Em todos os casos, a ordem do erro de truncamento depende do comportamento do símbolo $\Lambda(w,z)$.

Teorema 4.3 *O símbolo Λ para as três formulações satisfaz*

(a) *Para N par*

$$\Lambda(w,z) \sim \sum_{j=0}^{N} \mathcal{O}(w)^j \mathcal{O}(z)^{N-j}.$$

(b) *Para N ímpar*

$$\Lambda(w,z) \sim \mathcal{O}(z)^{N-1} + \sum_{j=0}^{N+1} \mathcal{O}(w)^j \mathcal{O}(z)^{N+1-j}.$$

<u>Prova</u>: Os principais ingredientes para a prova são a *CSF* de ϕ e ϕ^* e a relação de biortogonalidade. No caso par obtém-se uma melhor ordem como conseqüência da simetria, combinada com o fato que somente a primeira derivada está envolvida.

• **Interpolação**

Neste caso

$$\Lambda(w,z) = \widehat{\phi}^*(w+z) - \frac{i}{z}\widehat{\phi}^*(w)\widehat{\phi}^*(z)\overline{\widetilde{\phi}_\alpha(w)}\;\;\overline{\widetilde{\beta}_\alpha(z)}\;\;\overline{\widetilde{\gamma}(w+z)}.$$

A condição $\widetilde{\phi}_\alpha(\xi) \neq 0$, para $\forall \xi \in [-\pi, \pi]$, é satisfeita para $\alpha = 0$, quando N for par, e para $\alpha = 1/2$, quando N for ímpar. Desta forma, considera-se a representação

$$\phi(x) = \varphi(x-\alpha), \quad \phi^*(x) = \varphi^*(x-\alpha),$$

em que: $\alpha = 0$ para N, N^* pares; $\alpha = 1/2$ para N, N^* ímpares. As propriedades de simetria de ϕ e ϕ^* garantem que as funções φ e φ^* são simétricas e centralizadas em zero e têm a mesma ordem da condição de Strang-Fix de ϕ e ϕ^*. Com isto, segue que

$$\Lambda(w,z) = \frac{e^{-i\alpha(w+z)}}{\overline{\widetilde{\phi}_\alpha(w+z)}}\left[\widehat{\varphi^*}(w+z)\overline{\widetilde{\phi}_\alpha(w+z)} - \frac{i}{z}\widehat{\varphi^*}(w)\widehat{\varphi^*}(z)\overline{\widetilde{\phi}_\alpha(w)}\;\;\overline{\widetilde{\beta}_\alpha(z)}\,\overline{\widetilde{\gamma}(w+z)\widetilde{\phi}_\alpha(w+z)}\right].$$

Levando em consideração que $\widetilde{\gamma}(\xi)\widetilde{\phi}_\alpha(\xi) \equiv 1$, e definindo $\widetilde{q}(w) = \widehat{\varphi}^*(w)\overline{\widetilde{\phi}_\alpha(w)}$ e $\widetilde{f}(z) = \widehat{\varphi}^*(z)\overline{\widetilde{\beta}_\alpha(z)}$, resulta que

$$\Lambda(w,z) = \frac{e^{-i\alpha(w+z)}}{\overline{\widetilde{\phi}_\alpha(w+z)}}\left[\widetilde{q}(w+z) - \frac{i}{z}\widetilde{q}(w)\widetilde{f}(z)\right].$$

Como a função $\widetilde{\phi}_\alpha(w)$ não se anula e é limitada, para estimar $\Lambda(w,z)$ deve-se analisar o termo entre colchetes. Aplicando a fórmula do somatório de Poisson em $\widetilde{\phi}_\alpha(w)$ segue que

$$\widetilde{\phi}_\alpha(w) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\phi}(w+2\pi k)e^{i\alpha(w+2k\pi)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(w+2\pi k).$$

Com isto obtém-se

$$\widetilde{q}(w) = \widehat{\varphi}^*(w)\widehat{\varphi}(w) + \widehat{\varphi}^*(w)\sum_{k\geq 1} q_k(w),$$

em que $q_k(w) = \widehat{\varphi}(w+2k\pi) + \widehat{\varphi}(w-2\pi k)$. Pela *CSF* de φ segue que

$$\frac{d^n q_k}{dw^n}(0) = 0, \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Como $q_k(-w) = q_k(w)$ tem-se que para todo n ímpar

$$\frac{d^n q_k}{dw^n}(0) = 0.$$

Portanto

$$\widetilde{q}(w) = \begin{cases} 1 + \mathcal{O}(w)^N & \text{para } N \text{ par,} \\ \\ 1 + \mathcal{O}(w)^{N+1} & \text{para } N \text{ ímpar.} \end{cases} \tag{4.35}$$

De forma análoga obtém-se

$$\widetilde{q}(w+z) = \begin{cases} 1 + \displaystyle\sum_{m=0}^{N} \mathcal{O}(w^m z^{N-m}), & \text{para } N \text{ par,} \\ \\ 1 + \displaystyle\sum_{m=0}^{N+1} \mathcal{O}(w^m z^{N+1-m}), & \text{para } N \text{ ímpar.} \end{cases} \tag{4.36}$$

Aplicando a fórmula do somatório de Poisson em $\widetilde{\beta}_\alpha(z)$ obtém-se

$$\widetilde{\beta}_\alpha(z) = i\sum_{k\in\mathbb{Z}}(z+2\pi k)\widehat{\phi}(z+2\pi k)e^{i\alpha(z+2\pi k)} = i\sum_{k\in\mathbb{Z}}(z+2\pi k)\widehat{\varphi}(z+2\pi k).$$

Desta forma, segue que

$$\widetilde{f}(z) = z\widehat{\varphi}^*(z)\widehat{\varphi}(z) + \widehat{\varphi}^*(z)\sum_{k>0} f_k(z),$$

em que $f_k(z) = (z+2\pi k)\widehat{\varphi}(z+2\pi k) + (z-2\pi k)\widehat{\varphi}(z-2\pi k)$. Pela condição de Strang-Fix de ϕ segue que

$$\frac{d^n f_k}{dz^n}(0) = 0 \quad 0 \leq n \leq N-1.$$

Além disso, como $f_k(-z) = -f_k(z)$, tem-se que para todo n par

$$\frac{d^n f_k}{dz^n}(0) = 0.$$

Conseqüentemente

$$-\frac{i}{z}\widetilde{f}(z)=\begin{cases}-1+\mathcal{O}(z)^{N+N^*}+\mathcal{O}(z)^N, & \text{para } N \text{ par,}\\ \\ -1+\mathcal{O}(z)^{N+N^*}+\mathcal{O}(z)^{N-1}, & \text{para } N \text{ ímpar.}\end{cases} \tag{4.37}$$

Portanto, substituindo (4.36), (4.35) e (4.37) no símbolo Λ concluem-se os resultados teorema para a interpolação.

- **Quase Interpolação**

Este caso difere da interpolação somente pelo fato de que o termo $\widetilde{\gamma}(\xi)\widetilde{\phi}_\alpha(\xi)$ não é mais identicamente igual a 1. No entanto, como $\widetilde{\gamma}(\xi)\widetilde{\phi}_\alpha(\xi)=1+\mathcal{O}(\xi^N)$ (Lema 3.13), em que N é a ordem do esquema de quase interpolação, a demonstração do teorema também pode ser feita seguindo os mesmos passos como no caso da interpolação.

- **Projeção Discreta**

No caso da Projeção Discreta tem-se

$$\Lambda(w,z)=\widehat{\phi}^*(w+z)-\frac{i}{z}\widehat{\phi}^*(w)\widehat{\phi}^*(z)\widetilde{\Gamma}(w,z),$$

em que

$$\widetilde{\Gamma}(w,z)=\overline{\widetilde{\gamma}_P(w+z)}\;\widetilde{\phi}_0(w)\widetilde{\beta}_0(z)+\overline{\widetilde{\gamma}_I(w+z)}\;\widetilde{\phi}_{1/2}(w)\widetilde{\beta}_{1/2}(z),$$

e as funções $\widetilde{\gamma}_P$ e $\widetilde{\gamma}_I$ são definidas por (3.16). Lembrando que em (3.17) tem-se

$$\widetilde{\gamma}(\xi/2)\widehat{\phi}(\xi)=1+\mathcal{O}(\xi^N),$$

e combinando com o resultado

$$\overline{\widehat{\phi}^*(\xi)}\widehat{\phi}(\xi)\;=\;1+\mathcal{O}(\xi^{N+N^*}),$$

provado no Lema 2.2, resulta que

$$\left(\overline{\widehat{\phi}^*(\xi)}-\overline{\widetilde{\gamma}(\xi/2)}\right)\widehat{\phi}(\xi)=\mathcal{O}(\xi^N). \tag{4.38}$$

Tendo em vista que $\hat{\phi}(0)=1$, para que a relação (4.38) seja válida, o termo entre parênteses deve ser de ordem ξ^N. Portanto

$$\widetilde{\gamma}(\xi/2)=\widehat{\phi}^*(\xi)+\mathcal{O}(\xi^N). \tag{4.39}$$

Analisando o termo $\widetilde{\Gamma}$ tem-se que

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}(w,z)&=\overline{\widetilde{\gamma}_P(w+z)}\;\widetilde{\phi}_0(w)\widetilde{\beta}_0(z)+\overline{\widetilde{\gamma}_I(w+z)}\;\widetilde{\phi}_{1/2}(w)\widetilde{\beta}_{1/2}(z)\\ &=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(z+2n\pi)\widehat{\phi}(z+2n\pi)\widehat{\phi}(w+2n\pi)\overline{\widetilde{\gamma}((w+z)/2+(n+k)\pi)}.\end{aligned} \tag{4.40}$$

Observa-se que, substituindo $\widetilde{\gamma}(\xi/2)$ por $\widehat{\phi}^*(\xi)$ obtém-se $\widetilde{\lambda}$ definido em (4.19). Assim usando o resultado obtido em (4.39), a demonstração segue como no caso da formulação Petrov-Galerkin. ■

4.4 Resultados Numéricos

Resultados numéricos são apresentados, com o objetivo de obter as constantes assintóticas do símbolo Λ. Para verificar numericamente estes resultados, no caso em que N, N^* são ímpares, é necessário calcular $\widetilde{\phi}_{1/2}(w)$ e $\widetilde{\beta}_{1/2}(z)$. Para isto aplica-se a relação de escala (2.1) obtendo

$$\begin{aligned}
\widetilde{\phi}_{1/2}(w) &= 2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)\phi(2k+1-n)e^{-ikw} \\
&= 2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(2n)\phi(2k+1-2n) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(2n+1)\phi(2k-2n)\right\} e^{-ikw} \\
&= 2\left(H_P(w)\widetilde{\phi}_I(w) + H_I(w)\widetilde{\phi}_P(w)\right), \qquad (4.41) \\
\widetilde{\beta}_{1/2}(z) &= 4\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)\frac{d\phi}{dz}(2k+1-n)e^{-ikz} \\
&= 4\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(2n)\frac{d\phi}{dz}(2k+1-2n) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(2n+1)\frac{d\phi}{dz}(2k-2n)\right\} e^{-ikz} \\
&= 4\left(H_P(z)\widetilde{\beta}_I(z) + H_I(z)\widetilde{\beta}_P(z)\right). \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

Na Tabela 4.5 são apresentados alguns resultados numéricos que determinam as constantes assintóticas para as famílias $(N^*, N) = (1,5), (2,4)$.

Tabela 4.5: Termos assintóticos do símbolo Λ.

Esquema	(1,5)	(2,4)
I	$\frac{23}{180}z^4$	$\frac{691}{3150}z^4 + \frac{184}{315}z^3w + \frac{92}{105}z^2w^2 + \frac{184}{315}zw^3$
QI	$\frac{23}{180}z^4$	$\frac{83}{1200}z^4 - \frac{1}{60}z^3w - \frac{1}{40}z^2w^2 - \frac{1}{60}zw^3 - \frac{757}{5040}w^4$
PD	$-\frac{46}{315}z^4$	$\frac{83}{7996}z^4 + \frac{123}{4450}z^3w + \frac{109}{2629}z^2w^2 + \frac{123}{4450}zw^3$

Neste ponto, algumas comparações entre as formulações fazem-se necessárias.

- **Suporte:** Para o esquema de interpolação, os coeficientes $\gamma(k)$ podem ser obtidos em termos dos coeficientes de Fourier da função $1/\widetilde{\phi}_\alpha(\xi)$. Porém, com exceção do caso $N^* = 0$, em que $\phi(x)$ é uma função interpoladora de suporte compacto, tem-se infinitos coeficientes $\gamma(k) \neq 0$. Desta forma, a implementação numérica de $\mathcal{D}_c^j$ no espaço físico requer truncamento dos coeficientes [20] e o esquema deixa de ser conservativo. Tanto o esquema quase interpolação quanto a projeção discreta requerem um número finito de coeficientes $\gamma(k)$ não nulos. No caso da quase interpolação, $\gamma(k) = 0$ para $|k| > \lfloor (N-1)/2 \rfloor$. Já no caso da projeção discreta, $\gamma(k) = 0$ para $|k| > 2N - 3$.

- **Constantes Assintóticas:** As constantes assintóticas nos esquemas de interpolação e de quase interpolação são maiores que no esquema da projeção discreta.

- **Conservação:** A projeção discreta é conservativa, ao contrário da quase interpolação. Como visto na seção 3.4, esta é uma propriedade importante quando considera-se o problema em multinível.

Capítulo 5

Esquemas em Multinível para Problemas de Evolução: Adaptabilidade Temporal

O enfoque deste capítulo é sobre esquemas de aproximação para equações de evolução

$$\partial u(t,x)/\partial t = \mathcal{L}u(t,x),$$

em que $\mathcal{L}$ é um operador diferencial na variável espacial x. Adotam-se discretizações $\mathcal{L}^j$ no contexto de análise de multirresolução biortogonal e um esquema de diferenças finitas explícito para a variável temporal. Tipicamente, a condição de estabilidade de esquemas explícitos depende de uma relação entre o passo na discretização temporal Δ_t e o passo $\Delta_x = 2^{-j}$ da discretização da variável espacial. Esta pode ser uma restrição severa se a solução apresentar estruturas singulares que exijam escalas muito refinadas. Com a possibilidade de uma representação em multinível, pode-se pensar em usar diferentes passos de tempo para a evolução temporal das diferentes componentes de escala. Neste contexto é apresentado um esquema com adaptabilidade temporal, proposto por Bacry, Mallat e Papanicolau [1], no contexto de wavelets ortogonais. Neste trabalho, é feita a formulação de um esquema adaptativo semelhante, em termos das bases biortogonais. Mostra-se que tal esquema adaptativo mantém as mesmas condições de estabilidade e a mesma ordem de consistência do esquema não adaptado correspondente. Como problema modelo é considerado a equação do calor 1-dimensional, com soluções periódicas.

5.1 Preliminares

Para descrever os conceitos básicos usados neste capítulo, considera-se o problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathcal{L}u(t,x), & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{5.1}$$

com soluções periódicas da forma $u(t,x+1) = u(t,x)$. A princípio, assume-se que o operador $\mathcal{L}$ é um operador diferencial linear, de ordem m, sobre a variável x.

Consideram-se soluções numéricas $u_j(t_n, x)$ do problema (5.1) que podem ser representadas por valores discretos 2^j-periódicos $\mathbf{u}^{n,j}$. O índice j está associado com a resolução espacial $\Delta_x = 2^{-j}$ enquanto que o índice n está relacionado com o nível temporal $t_n = n\Delta_t$. Os esquemas considerados podem ser representados por

$$u_j(t_n + \Delta_t, x) = [\mathcal{K}^j u_j(t_n, \cdot)](x). \tag{5.2}$$

Em termos dos valores discretos $\mathbf{u}^{n,j}$, o operador $\mathcal{K}^j$ é representado por uma relação matricial do tipo

$$\mathbf{u}^{n+1,j} = \mathcal{K}^j \mathbf{u}^{n,j}, \tag{5.3}$$

em que $\mathcal{K}^j = \mathcal{K}(\Delta_t, 2^{-j})$. Desta forma,

$$\mathbf{u}^{n+1,j} = [\mathcal{K}^j]^n \mathbf{u}^{0,j}.$$

Nota-se que, para fins de simplificação, é adotada uma notação unificada $\mathcal{K}^j$ tanto para o operador quanto para sua representação matricial.

Analogamente, para equações não homogêneas

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathcal{L}u(t,x) + f(t,x), \tag{5.4}$$

em que $f(t,x) = f(t,x+1)$, consideram-se esquemas de aproximação da forma

$$u_j(t_n + \Delta_t, x) = [\mathcal{K}^j u_j(t_n, \cdot)](x) + \Delta_t f^j(t_n, x), \tag{5.5}$$

que podem ser expressos em forma matricial como

$$\mathbf{u}^{n+1,j} = \mathcal{K}^j \mathbf{u}^{n,j} + \Delta_t \mathbf{f}^{n,j}, \tag{5.6}$$

Na análise feita a seguir, para vetores $\mathbf{u}$, 2^j-periódicos, adota-se a norma discreta $||\cdot||_j$ dada por

$$||\mathbf{u}^j||_j^2 = 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |u^j(k)|^2.$$

Conforme enunciado no lema a seguir, provado por Gomes [22], a norma de $\mathbf{L}^2[0,1]$, quando aplicada a funções 1-periódicas geradas por uma base de Riesz, é equivalente à norma discreta de seus coeficientes.

Lema 5.1 *Suponha que $\{\phi(2^j \cdot -k);\ k \in \mathbb{Z}\}$ forma uma base de Riesz de V_j. Então, para funções 1-periódicas v representadas por*

$$v(x) = \sum_k v^j(k)\phi(2^j x - k),$$

a seguinte equivalência entre normas é válida

$$C_1\|\mathbf{v}^j\|_j^2 \leq \|v\|^2_{\mathbf{L}^2([0,1])} \leq C_2\|\mathbf{v}^j\|_j^2.$$

5.2 Análise Clássica

Os conceitos de consistência e estabilidade são de fundamental importância na análise da convergência de esquemas numéricos. Por se tratar de resultados clássicos, as demonstrações dos resultados apresentados nesta seção serão omitidas. Todavia estas podem ser encontradas em Gustafsson, Kreiss e Oliger [2].

• **Estabilidade**

A idéia essencial no conceito de estabilidade é que, com a evolução do processo numérico, os erros cometidos nos passos anteriores não são amplificados.

Definição 5.1 *Um esquema do tipo (5.3) é dito ser estável numa região Ω_{est} se existem constantes C_e e α_e, que independem de Δ_t e j, tal que*

$$||\mathbf{u}^{n,j}||_j \leq C_e e^{\alpha_e t_n} ||\mathbf{u}^{0,j}||_j, \tag{5.7}$$

para $0 \leq t_n \leq T$, sempre que $(\Delta_t, 2^{-j}) \in \Omega_{est}$.

Uma condição necessária e suficiente para que $\mathbf{u}^{n,j}$ satisfaça (5.7) é que

$$||(\mathcal{K}^j)^k||_j \leq C_e e^{\alpha_e t_k}, \tag{5.8}$$

em que $||\mathcal{K}^j||_j$ é a norma matricial induzida pela norma vetorial. A definição inclui um fator exponencial para permitir o tratamento de aproximações de equações que tenham um crescimento exponencial.

Para aproximações de equações com coeficientes constantes, as propriedades de estabilidade podem ser analisadas no domínio de Fourier, com a aplicação do critério de von Neumann [2].

Teorema 5.1 *Suponha que para o esquema de aproximação (5.3) existe uma função $\widehat{\mathcal{K}}(\xi) = \widehat{\mathcal{K}}(\xi, \Delta_t, 2^{-j})$, tal que este seja representado no domínio de Fourier por*

$$\widehat{u}^{n+1,j}(k) = \widehat{\mathcal{K}}(\xi_k^j)\widehat{u}^{n,j}(k),$$

em que $\xi_k^j = 2\pi k 2^{-j}$. Então o esquema é estável se e somente se o símbolo $\widehat{\mathcal{K}}(\xi)$ satisfaz

$$||\,[\widehat{\mathcal{K}}(\xi)]^n||_j \leq C_e e^{\alpha_e t_n}, \qquad \xi \in [0, 2\pi], \tag{5.9}$$

em que as constantes C_e e α_e são independentes de ξ, Δ_t e 2^{-j}.

Para problemas com termo de fonte, considerando que o problema homogêneo correspondente seja estável, pode-se estimar a solução de (5.6) por intermédio do seguinte teorema.

Teorema 5.2 *Assumindo que o problema homogêneo seja estável, então a solução de (5.4) satisfaz a estimativa*

$$||\mathbf{u}^{n,j}||_j \leq C_e \left(e^{\alpha_e t n}||\mathbf{u}^{0,j}||_j + q(\alpha_e, t_n) \max_{0 \leq s \leq n-1} ||\mathbf{f}^{s,j}||_j \right),$$

em que

$$q(\alpha_e, t_n) = \Delta_t \sum_{k=0}^{n-1} e^{\alpha_e(t_n - t_k)}.$$

Com isto, podem-se analisar os efeitos da perturbação do operador $\mathcal{K}^j$ por um operador de ordem $\mathcal{O}(\Delta_t)$. Seja

$$\mathbf{u}^{n+1,j} = \left(\mathcal{K}^j + \Delta_t \mathcal{E}^j\right) \mathbf{u}^{n,j}, \tag{5.10}$$

em que $\|\mathcal{E}^j\|_j \leq C$, sendo C uma constante que não depende de j.

Teorema 5.3 *Assumindo que a aproximação (5.3) seja estável, segue que a aproximação perturbada (5.10) é estável.*

Este teorema mostra que perturbações de ordem Δ_t não causam instabilidade. Portanto, na análise da estabilidade, tais perturbações podem ser negligenciadas.

- **Consistência**

Outro conceito importante é a noção de consistência, que está associada à precisão com que o esquema numérico aproxima a equação diferencial, ou seja, está associada à ordem do erro de truncamento

$$\Delta_t(ET^{n,j})(k) \quad = \quad u(t_n + \Delta_t, x_k^j) - (\mathcal{K}^j u)(t_n, x_k^j), \tag{5.11}$$

em que $u(t, x)$ é uma solução de (5.1).

Definição 5.2 *O esquema de aproximação (5.3) é consistente se o erro de truncamento tende a zero quando $(\Delta_t, 2^{-j}) \to 0$. Neste caso, o esquema de aproximação é dito ser de ordem (k, ℓ) se*

$$||ET^{n,j}||_j = \mathcal{O}({\Delta_t}^k) + \mathcal{O}(2^{-j\ell}).$$

- **Convergência**

O estudo da convergência consiste em analisar condições sob as quais a solução obtida pelo esquema numérico se aproxima da solução da equação diferencial associada, quando a malha é refinada.

Definição 5.3 *O esquema de aproximação (5.3) é convergente se*

$$\|u(t_n,\cdot) - u_j(t_n,\cdot)\|_{\mathbf{L}^2} \to 0, \ \textit{quando } j \to \infty.$$

para qualquer valor de t_n.

Em geral, provar diretamente da definição, que um esquema é convergente, não é uma tarefa fácil. Em equações lineares, a convergência pode ser estabelecida por intermédio do Teorema de Equivalência de Lax-Richtmyer [32], apresentado a seguir

Teorema 5.4 *Se o esquema de aproximação (5.3) é consistente, a estabilidade é uma condição necessária e suficiente para que o esquema seja convergente.*

5.3 Análise de Esquemas Biortogonais

Os esquemas de aproximação apresentados nesta seção são baseados nas splines biortogonais. Na escala 2^{-j}, considera-se $\mathcal{L}^j v^j$ a discretização de $\mathcal{L}$ do tipo Petrov-Galerkin, como descrito no Capítulo 4. Para fins de simplificação, é adotada uma notação unificada $\mathcal{L}^j$ tanto para a discretização de $\mathcal{L}$ quanto para a reconstrução $(\mathcal{L}^j v)(x) = \mathcal{R}^j(x; \mathcal{L}^j v^j)$, em que o operador de reconstrução é definido por expansões 1-periódicas em termos das funções splines biortogonais de ordem (N^*, N). Com isto tem-se o problema semidiscreto

$$\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial t} = [\mathcal{L}^j u_j(t,\cdot)](x),$$

sendo que, para cada t fixo, a solução $u_j(t,x)$ pertence ao espaço gerado pelas funções básicas $\{\phi(2^j \cdot -k), k \in \mathbb{Z}\}$.

O próximo passo é a discretização da variável temporal t. Por exemplo, pode-se discretizar o problema usando o método explícito de Euler dado por

$$u_j(t+\Delta_t, x) = [(I + \Delta_t \mathcal{L}^j) u_j(t,\cdot)](x) =: [\mathcal{K}^j u_j(t,\cdot)](x). \tag{5.12}$$

Sejam $u^{n,j}(s) = (\mathcal{D}^j u_j(t_n,\cdot))(s)$ os coeficientes 2^j-periódicos da expansão

$$u_j(t_n,x) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} u^{n,j}(s)\phi(2^j x - s).$$

Em termos destes coeficientes, o esquema (5.12) pode ser expresso por intermédio da relação

$$\begin{aligned} u^{n+1,j}(k) &= [(I + \Delta_t \mathcal{L}^j) u^{n,j}](k) \\ &= [\mathcal{K}^j \mathbf{u}^{n,j}](k), \end{aligned} \tag{5.13}$$

em que $\mathcal{K}^j = \mathcal{K}(\Delta_t, 2^{-j}) = (I + \Delta_t \mathcal{L}^j)$. Considerando o tempo final T e $\Delta_t = T/N_t$ para $N_t \in \mathbb{N}$, a equação (5.13) define um esquema de aproximação para a solução $u(t,x)$ do problema (5.1) na malha $(t_n, x_k^j) = (n\Delta_t, k2^{-j})$ para $n = 0, 1, \ldots, N_t$, e $k = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$.

5.3.1 Estabilidade: Análise de von Neumann

No caso de equações com coeficientes constantes, a aplicação da análise de Fourier facilita o estudo das condições necessárias e suficientes para a estabilidade. Para ilustrar o método, considera-se o caso particular da equação do calor 1-dimensional em que $\mathcal{L}u = u_{xx}$. Como descrito na Seção 4.2,

$$(\mathcal{L}^j u^{n,j})(s) = 2^{2j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u^{n,j}(k) \beta^{(2)}(s-k),$$

em que $\beta^{(2)}(k) = \dfrac{d^2\theta_M}{dx^2}(k)$ e considera-se que a regularidade de θ_M seja maior ou igual a dois.

Tendo em vista que as condições de contorno são periódicas, que o operador $\mathcal{L}$ é linear com coeficientes constantes e as discretizações em uso, são baseadas em esquemas de aproximação em malha uniforme, resulta que o problema discreto (5.13) é dado em forma de convolução cíclica. Ou seja $\mathcal{K}^j$ é uma matriz circulante, conforme Definição A.1, no Apêndice A. Aplicando a *TDF*, o sistema (5.13) é desacoplado, resultando na diagonalização de $\mathcal{K}^j$,

$$\widehat{u}^{n+1,j}(k) = \left[1 + 2^{2j}\Delta_t \widetilde{\beta}^{(2)}(\xi_k^j)\right] \widehat{u}^{n,j}(k) = \widehat{\mathcal{K}}(\xi_k^j)\widehat{u}^{n,j}(k), \tag{5.14}$$

em que

$$\widetilde{\beta}^{(2)}(\xi) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \beta^{(2)}(s) e^{-is\xi} \quad \text{e} \quad \xi_k^j = 2\pi k 2^{-j}.$$

O símbolo $\widehat{\mathcal{K}}(\xi) = \widehat{\mathcal{K}}(\xi, \Delta_t, 2^{-j})$ é chamado de fator de amplificação, pois sua magnitude indica como a amplitude $\widehat{u}^{n,j}(k)$ de cada freqüência presente na solução é amplificada no avanço do tempo.

No caso da equação do calor,

$$\widehat{\mathcal{K}}(\xi) = 1 + \tau \widetilde{\beta}^{(2)}(\xi),$$

em que $\tau = 2^{2j}\Delta_t$. Considerando que τ permanece constante, segue que a condição de estabilidade (5.9) só pode ser verificada com $\alpha_e = 0$ e $C_e = 1$. Ou seja, o esquema será estável se e somente se $|\widehat{\mathcal{K}}(\xi)| \leq 1$, isto é,

$$\left|1 + \tau \widetilde{\beta}^{(2)}(\xi)\right| \leq 1, \qquad \xi \in [0, 2\pi]. \tag{5.15}$$

Como mostrado na Figura 5.1a, $\beta^{(2)}(\xi)$ é uma função negativa, cujo valor mínimo ocorre em $\xi = \pi$. Portanto a condição de estabilidade é satisfeita se

$$0 < \tau \leq \frac{2}{\max\limits_{\xi \in [0,2\pi]} |\widetilde{\beta}^{(2)}(\xi)|} = \frac{2}{|\widetilde{\beta}^{(2)}(\pi)|} = \tau_{\max}. \tag{5.16}$$

A Tabela 5.1 mostra os valores de $|\widetilde{\beta}^{(2)}(\pi)|$ para $M = 6, 8$ e 10 e os correspondentes valores de $\tau_{\max}$ para que a estabilidade seja garantida.

Os gráficos 5.1b-5.1d mostram o comportamento de $|\widehat{\mathcal{K}}(\xi)|$ para $M = 6$, $M = 8$, $M = 10$ e para certos valores de τ satisfazendo (5.16).

Tabela 5.1: Valores dos $|\widetilde{\beta}^{(2)}(\pi)|$ e os correspondentes $\tau_{\max}$

M	$\lvert\widetilde{\beta}^{(2)}(\pi)\rvert$	$\tau_{\max}$
6	$\frac{1472}{105} \sim 14.019047619$	0.142663043
8	$\frac{1339264}{119945} \sim 11.165650923$	0.179120770
10	$\frac{21066447454208}{2028319032915} \sim 10.386160713$	0.192563937

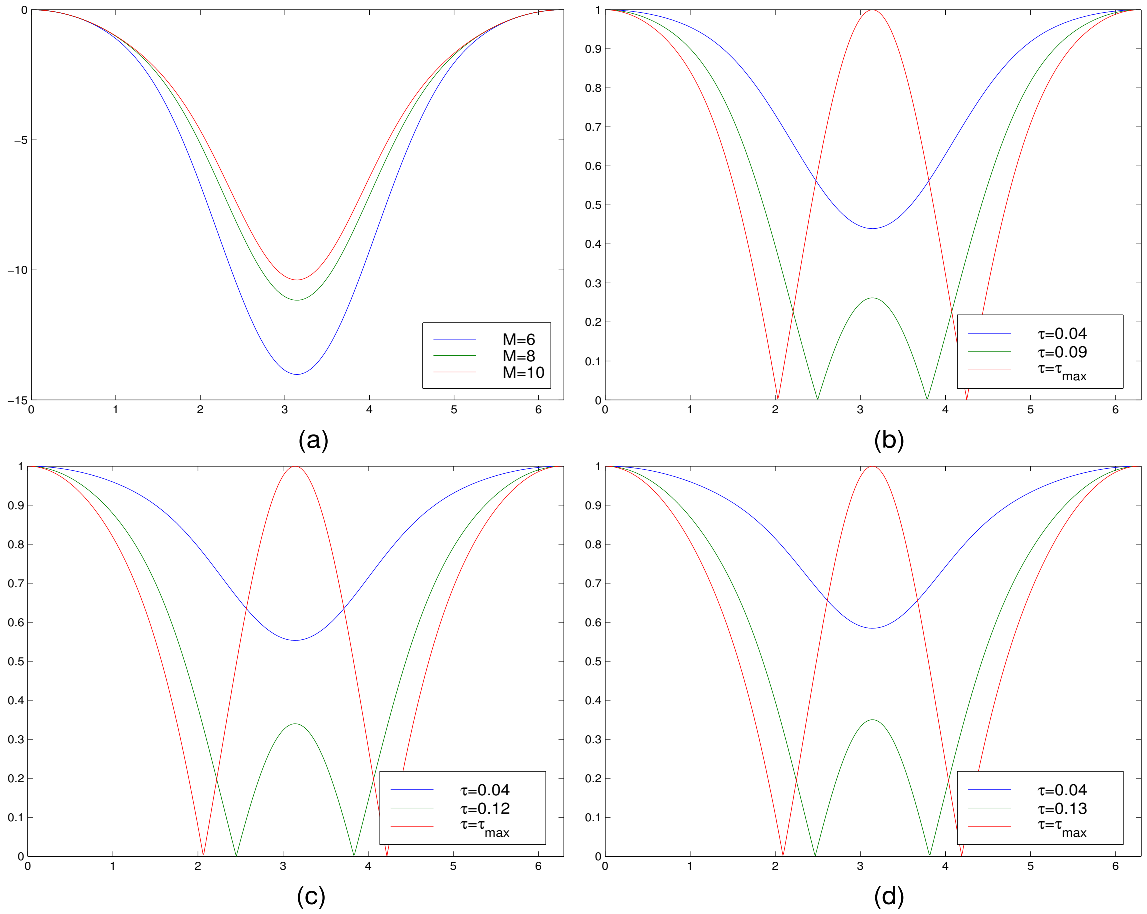


Figura 5.1: Comportamento de: (a) $\widetilde{\beta}^{(2)}(\xi)$; $|\widehat{\mathcal{K}}(\xi)|$ para: (b) $M = 6$; (c) $M = 8$; (d) $M = 10$.

5.3.2 Consistência e Convergência

Das equações (5.11) e (5.12) segue que o erro de truncamento pode ser expresso na seguinte forma

$$
\begin{aligned}
(ET^{n,j})(k) &= \frac{1}{\Delta_t}\left[u(t_n+\Delta_t, x_k^j) - (\mathcal{K}^j u)(t_n, x_k^j)\right] \\
&= \frac{1}{\Delta_t}\left[u(t_n+\Delta_t, x_k^j) - u(t_n, x_k^j)\right] - (\mathcal{L}^j u)(t_n, x_k^j) \\
&= \left\{\frac{1}{\Delta_t}\left[u(t_n+\Delta_t, x_k^j) - u(t_n, x_k^j)\right] - \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_k^j)\right\} + \left[(\mathcal{L}-\mathcal{L}^j)u\right](t_n, x_k^j).
\end{aligned}
$$

O erro de truncamento divide-se em duas partes. A primeira corresponde ao erro de truncamento da discretização temporal, que neste caso é o esquema de Euler explícito, cuja precisão é de primeira ordem. A segunda parte é o erro de truncamento na discretização espacial do operador $\mathcal{L}$, que, segundo os resultados obtidos no Capítulo 4, é da ordem de $2^{-j(M-2)}$. Desta forma,

$$||ET^{n,j}||_j = \mathcal{O}(\Delta_t) + \mathcal{O}(2^{-j(M-2)}).$$

Portanto o esquema é consistente de ordem $(1, M-2)$. De acordo com o Teorema 5.4, conclue-se que, obedecendo a condição de estabilidade, o esquema é convergente.

5.4 Esquemas em Multinível e Adaptabilidade Temporal

Como descrito na Seção 5.3.1, a condição de estabilidade para esquemas explícitos envolve um compromisso entre o passo de tempo e o nível de escala. Esta pode ser uma restrição severa se a solução apresentar estruturas singulares que exijam escalas muito refinadas. Se o mesmo problema for resolvido com um esquema em multinível, em princípio pode-se pensar em usar diferentes passos de tempo para a evolução temporal das diferentes componentes de escala. Nesta seção é apresentada uma proposta neste sentido, que foi introduzida por Bacry, Mallat e Papanicolau [1], e é feita a sua análise de estabilidade e consistência.

Seguindo esta linha de raciocínio, a idéia consiste em representar a solução numérica em multinível e evoluir as componentes de forma diferenciada, escolhendo, em cada nível, um passo no tempo compatível com a escala correspondente. Para ilustrar o método, considera-se o caso específico da equação do calor. No nível j, escolhe-se $\Delta_t^j \leq 4^{-j}\tau_{\max}$ de tal forma que o esquema (5.12) seja estável, em que $\tau_{\max}$ é definido pela condição de estabilidade (5.16). Já no nível inferior $j-1$, o passo no tempo pode ser quatro vezes maior, $\Delta_t^{j-1} = 4\Delta_t^j$. Ou seja, no nível $j-1$, a solução no tempo $t+\Delta_t^{j-1}$ é calculada da seguinte forma

$$u_{j-1}(t+\Delta_t^{j-1}, x) = \left(I + \Delta_t^{j-1}\mathcal{L}^{j-1}\right) u_{j-1}(t, x). \tag{5.17}$$

No nível j, o passo no tempo é quatro vezes menor e, portanto, necessita-se de quatro iterações para calcular a solução em $t+\Delta_t^{j-1}$, isto é

$$u_j(t+\Delta_t^{j-1}, x) = u_j(t+4\Delta_t^j, x) = (I + \Delta_t^j\mathcal{L}^j)^4 u_j(t, x). \tag{5.18}$$

Usando a decomposição em multinível $V_j = V_{j-1} + W_{j-1}$, enquanto as componentes em W_{j-1} devem ser calculadas com o passo Δ_t^j, é natural pensar que as componentes em V_{j-1} possam ser calculadas com um passo de tempo Δ_t^{j-1}. Lembrando que $(\mathcal{P}^j v)(x) = \mathcal{R}^j(x; \mathcal{D}^j v)$, o operador $(\mathcal{L}^j v)(x) = \mathcal{R}^j(x; \mathcal{L}^j v^j)$ pode ser expresso da seguinte forma $\mathcal{L}^j v = \mathcal{P}^j \mathcal{L} \mathcal{P}^j v$. A representação de $\mathcal{P}^j$ em multinível $\mathcal{P}^j = \mathcal{P}^{j-1} + \mathcal{Q}^{j-1}$ implica que o operador $\mathcal{L}^j$ admite a decomposição

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^j &= \mathcal{P}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{P}^{j-1} + \mathcal{P}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1} + \mathcal{Q}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{P}^{j-1} + \mathcal{Q}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1} \\ &= \mathcal{L}^{j-1} + \mathcal{T}^j, \end{aligned} \tag{5.19}$$

em que $\mathcal{L}^{j-1}$ é a discretização de $\mathcal{L}$ no nível $j-1$ e $\mathcal{T}^j$ é o operador

$$\mathcal{T}^j = \mathcal{P}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1} + \mathcal{Q}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{P}^{j-1} + \mathcal{Q}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1},$$

que atua em componentes relacionadas com detalhes entre os dois níveis. Das equações (5.17), (5.18) e (5.19) resulta que

$$u_j(t + 4\Delta_t^j, x) = [(I + \Delta_t^j \mathcal{T}^j) + \Delta_t^j \mathcal{L}^{j-1}]^4 u_j(t, x). \tag{5.20}$$

Desenvolvendo esta potência, e desconsiderando os termos em que apareça o fator $\Delta_t^j \mathcal{L}^{j-1}$ com ordem superior a um, obtém-se o esquema simplificado

$$\begin{aligned} u_j(t + 4\Delta_t^j, x) &= [(I + \Delta_t^j \mathcal{T}^j)^4 + 4\Delta_t^j \mathcal{L}^{j-1}] u_j(t, x) \\ &=: \mathcal{K}_a^j u_j(t, x). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Observa-se que este esquema modificado atua como se a solução $u_j(t + 4\Delta_t^j, x)$ no tempo $t + 4\Delta_t^j$ tivesse sido obtida pela evolução do termo $\mathcal{L}^{j-1} u_j(t, x)$ com passo de tempo $\Delta_t^{j-1} = 4\Delta_t^j$, enquanto que para a componente $\mathcal{T}^j u_j(t, x)$ utiliza-se um passo de tempo Δ_t^j.

5.4.1 Estrutura do Esquema em 2 Níveis de Escala

O esquema (5.21) pode ser formulado em termos dos coeficientes em multinível da solução. A análise feita, a seguir, restringe-se aos esquemas associados às análises de multirresolução interpoladoras V_j definidas pelas funções interpoladoras $\theta = \theta_M$, que tenham regularidade $r \geq 2$. Uma função $v \in V_j$ pode ser expressa por

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} v^j(k) \theta(2^j x - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} v^{j-1}(k) \theta(2^{j-1} x - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} d^{j-1}(k) \psi(2^{j-1} x - k), \end{aligned}$$

em que $v^j(k) = v(k 2^{-j})$ e $d^{j-1}(k) = \mathcal{G}^{j-1} v(k)$, como indicado em (2.21) e (3.18). Desenvolvendo cada termo de (5.19), segue que

$$(\mathcal{L}^{j-1} v)(x) = (\mathcal{P}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{P}^{j-1} v)(x) \tag{5.22}$$

$$= 2^{2j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_{0,0}(k) \theta(2^{j-1} x - k), \tag{5.23}$$

em que

$$\lambda_{0,0}(k) = \frac{1}{4}\sum_{s\in\mathbb{Z}} v^{j-1}(s)\beta^{(2)}(s-k).$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}^j v)(x) &= (\mathcal{P}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1}v)(x) + (\mathcal{Q}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{P}^{j-1}v)(x) + (\mathcal{Q}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1}v)(x) \\
&= 2^{2j}\left[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_{0,1}(k)\theta(2^{j-1}x-k) + \sum_{k\in\mathbb{Z}}[\lambda_{1,0}(k)+\lambda_{1,1}(k)]\psi(2^{j-1}x-k)\right], \quad (5.24)
\end{aligned}$$

em que os coeficiente desta decomposição são dados por

$$\begin{aligned}
\lambda_{0,1}(k) &= \frac{1}{4}\sum_{s\in\mathbb{Z}} d^{j-1}(s)\vartheta^{(2)}(s-k), \\
\lambda_{1,0}(k) &= \frac{1}{4}\sum_{s\in\mathbb{Z}} v^{j-1}(s)\chi_1(s-k), \\
\lambda_{1,1}(k) &= \frac{1}{4}\sum_{s\in\mathbb{Z}} d^{j-1}(s)\chi_2(s-k),
\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
\vartheta^{(m)}(k) &= \frac{d^m\psi}{dx^m}(k), \\
\chi_1(s) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} g^*(n)\beta^{(2)}(n/2+s), \\
\chi_2(s) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} g^*(n)\vartheta^{(2)}(n/2+s).
\end{aligned}$$

Desta maneira, o operador $I+\Delta_t^j\mathcal{T}^j$ tem a seguinte forma

$$(I+\Delta_t^j\mathcal{T}^j v)(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a^{j-1}(k)\theta(2^{j-1}x-k) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} b^{j-1}(k)\psi(2^{j-1}x-k),$$

com

$$\begin{aligned}
a^{j-1}(k) &= v^{j-1}(k) + \tau\lambda_{0,1}(k), \quad (5.25) \\
b^{j-1}(k) &= d^{j-1}(k) + \tau(\lambda_{1,0}(k)+\lambda_{1,1}(k)). \quad (5.26)
\end{aligned}$$

Para descrever a ação do operador $I+\Delta_t^j\mathcal{T}^j$ de forma matricial, seja $\mathbf{v}^j$ o vetor contendo os valores discretos em multinível de $v(x)$, ordenados da seguinte forma

$$\mathbf{v}^j = [v^{j-1}(0), d^{j-1}(0), \ldots, v^{j-1}(k), d^{j-1}(k), \ldots, v^{j-1}(2^{j-1}-1), d^{j-1}(2^{j-1}-1)]^T.$$

Seja

$$[a^{j-1}(0), b^{j-1}(0), \ldots, a^{j-1}(k), b^{j-1}(k), \ldots, a^{j-1}(2^{j-1}-1), b^{j-1}(2^{j-1}-1)]^T,$$

o vetor correspondente aos valores discretos em multinível de $(I+\Delta_t^j\mathcal{T}^j)\mathbf{v}^j$. Pelas fórmulas (5.25)-(5.26), e tendo em vista a forma de convolução dos vetores $\lambda_{0,1}$, $\lambda_{1,0}$ e $\lambda_{1,1}$, segue que, com este tipo de ordenação, $(I+\Delta_t^j\mathcal{T}^j)$ possui uma estrutura matricial circulante de blocos 2×2. A saber, $I+\Delta_t^j\mathcal{T}^j=\mathrm{circ}(A_0,A_1,\ldots,A_{2^{j-1}-1})$, em que

$$A_k=\begin{pmatrix}\delta_k & \vartheta(k)\\ \chi_1(k) & \delta_k+\chi_2(k)\end{pmatrix}.$$

Conseqüentemente, por intermédio do Lema A.1, segue que esta matriz pode ser transformada pela matriz de Fourier $F_{2^{j-1},2}$, definida no Apêndice A, em (A.3), em uma matriz bloco-diagonal, com blocos 2×2. Precisamente, valem as fórmulas do seguinte lema.

Lema 5.2 *Sejam $\widehat{a}^{j-1}$ e $\widehat{b}^{j-1}$ a TDF de ordem 2^{j-1} dos coeficientes $a^{j-1}(k)$ e $b^{j-1}(k)$ das equações (5.25) e (5.26). Então*

$$\begin{pmatrix}\widehat{a}^{j-1}(k)\\ \widehat{b}^{j-1}(k)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{\tau}{4}\widetilde{\vartheta}^{(2)}(2\xi_k^j)\\ \frac{\tau}{4}\widetilde{\chi}_1(2\xi_k^j) & 1+\frac{\tau}{4}\widetilde{\chi}_2(2\xi_k^j)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widehat{v}^{j-1}(k)\\ \widehat{d}^{j-1}(k)\end{pmatrix},$$

em que

$$\begin{aligned}
\widetilde{\chi}_1(\xi) &= \overline{G_P^*(\xi)}\widetilde{\beta}^{(2)}(\xi)+\overline{G_I^*(\xi)}\widetilde{\beta}^{(2)}_{1/2}(\xi),\\
\widetilde{\chi}_2(\xi) &= \overline{G_P^*(\xi)}\widetilde{\vartheta}^{(2)}(\xi)+\overline{G_I^*(\xi)}\widetilde{\vartheta}^{(2)}_{1/2}(\xi),\\
\widetilde{\beta}^{(2)}(\xi) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\beta^{(2)}(s)e^{-i\xi s},\\
\widetilde{\vartheta}^{(2)}(\xi) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}}\vartheta^{(2)}(s)e^{-i\xi s},\\
G_P^*(\xi) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}}g^*(2s)e^{-i\xi s},\\
G_I^*(\xi) &= \sum_{s\in\mathbb{Z}}g^*(2s+1)e^{-i\xi ks}.
\end{aligned}$$

Com isto, obtém-se o seguinte resultado sobre o operador $\mathcal{K}_a^j=(I+\Delta_t^j\mathcal{T}^j)^4+4\Delta_t^j\mathcal{L}^{j-1}$.

Corolário 5.1 *A ação do operador $\mathcal{K}_a^j=(I+\Delta_t^j\mathcal{T}^j)^4+4\Delta_t^j\mathcal{L}^{j-1}$ do esquema adaptativo (5.21) pode ser expressa no domínio de Fourier em termos dos valores discretos em multinível*

$$\widehat{\mathbf{u}}^{n,j}=[\widehat{u}^{n,j-1}(0),\widehat{d}^{n,j-1}(0),\widehat{u}^{n,j-1}(1),\widehat{d}^{n,j-1}(1)\ldots,\widehat{u}^{n,j-1}(2^{j-1}-1),\widehat{d}^{n,j-1}(2^{j-1}-1)]^T,$$

pela relação

$$\widehat{\mathbf{u}}^{n+1,j}=\widehat{\mathcal{K}}_a^j\widehat{\mathbf{u}}^{n,j},$$

em que $\widehat{\mathcal{K}}_a^j$ *é uma matriz bloco-diagonal, com os blocos* 2×2 *definidos por* $\widehat{\mathcal{K}}_a(2\xi_k^j, \tau)$, $0 \leq k \leq 2^{j-1} - 1$ *de tal forma que*

$$\begin{pmatrix} \widehat{u}^{n+1,j-1}(k) \\ \widehat{d}^{n+1,j-1}(k) \end{pmatrix} = \widehat{\mathcal{K}}_a(2\xi_k^j, \tau) \begin{pmatrix} \widehat{u}^{n,j-1}(k) \\ \widehat{d}^{n,j-1}(k) \end{pmatrix},$$

em que as matrizes de amplificação $\widehat{\mathcal{K}}_a(\xi; \tau)$ *são dadas por*

$$\widehat{\mathcal{K}}_a(\xi, \tau) = \left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{\tau}{4}\widetilde{\vartheta}^{(2)}(\xi) \\ \frac{\tau}{4}\widetilde{\chi}_1(\xi) & 1 + \frac{\tau}{4}\widetilde{\chi}_2(\xi) \end{pmatrix}^4 + \tau \begin{pmatrix} \widetilde{\beta}^{(2)}(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

<u>Prova:</u> É uma conseqüência dos resultados do Lema 5.2 e do Teorema A.5. ■

5.4.2 Condição de Estabilidade

Sabe-se que a região de estabilidade do esquema usual é dada por $\tau \leq \tau_{\max}$. A questão aqui é saber como é caracterizada a região de estabilidade para o esquema adaptativo associado. Como será verificado, é preservada a mesma região em ambos esquemas.

Pelos resultados descritos acima, o esquema adaptativo (5.21) pode ser representado, no domínio de Fourier, pela relação

$$\widehat{\mathbf{u}}^{n+1,j} = \widehat{\mathcal{K}}_a^j \widehat{\mathbf{u}}^{n,j}.$$

Portanto, a sua análise de estabilidade pode ser feita em termos das propriedades espectrais da matriz de amplificação $\widehat{\mathcal{K}}_a$, como descrito a seguir (ver Gustafsson [2], Theorem 5.2.2 e Theorem 5.2.3)).

Teorema 5.5 *Uma condição necessária para a estabilidade é que os autovalores* ν_k *de* $\widehat{\mathcal{K}}_a$ *satisfaçam*

$$|\nu_k| \leq e^{\alpha_e \Delta_t}. \tag{5.27}$$

Esta condição é suficiente no caso em que $\widehat{\mathcal{K}}_a$ *pode ser uniformemente diagonalizável. Isto é, existe uma matriz* T *tal que*

$$T^{-1}\widehat{\mathcal{K}}_a T = diag(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{2^j}),$$

com $\|T\|\,\|T^{-1}\| \leq C$, *em que* C *é independente dos parâmetros de discretização temporal e espacial.*

No caso do esquema adaptativo em estudo, $\widehat{\mathcal{K}}_a^j$ é uma matriz diagonal em blocos, com os blocos 2×2 definidos por $\widehat{\mathcal{K}}_a(2\xi_k^j; \tau)$, $0 \leq k \leq 2^{j-1} - 1$. Desta forma, basta analisar as propriedades espectrais de cada bloco para determinar a condição de estabilidade.

Os autovalores $\nu_{k,\ell}$, $\ell = 1, 2$ de cada bloco $\widehat{\mathcal{K}}_a(\xi_k^j, \tau)$ podem ser obtidos de uma forma explícita em função dos elementos do bloco (ver Apêndice B). Com isto pode-se analisar o comportamento do raio espectral $\rho(\widehat{\mathcal{K}}_a(\xi, \tau))$, de acordo com a variação de ξ e τ.

Um estudo numérico indica que, para τ fixo, o máximo de $\rho(\widehat{\mathcal{K}}_a(\xi; \tau))$ ocorre em $\xi = \pi$, em que

$$\widehat{\mathcal{K}}_a(\pi, \tau) = \begin{pmatrix} 1 + \tau\widetilde{\beta}^{(2)}(\pi) & 0 \\ 0 & \left[1 + \dfrac{\tau}{4}\widetilde{\chi}_2(\pi)\right]^4 \end{pmatrix}.$$

De fato, na Figura 5.2 é mostrado o comportamento de $\rho(\widehat{\mathcal{K}}_a(\pi; \tau))$ para $M = 6, 8, 10$ e 12, e nota-se que para $\tau > \tau_{\max}$, $\rho(\widehat{\mathcal{K}}_a(\pi, \tau)) > 1$. Portanto, para $\tau > \tau_{max}$ tanto o esquema usual como o esquema adaptativo associado são instáveis.

A Figura 5.3 mostra as curvas de níveis de $\rho(\widehat{\mathcal{K}}_a(\xi; \tau))$ de acordo com a variação de (ξ, τ), para $M = 6, 8, 10, 12$. Pode-se observar que, para $\tau \leq \tau_{\max}$, $\rho(\widehat{\mathcal{K}}_a(\xi, \tau)) \leq 1$. Como já foi observado, para $\tau > \tau_{\max}$ existem intervalos em que $\rho(\widehat{\mathcal{K}}_a(\xi, \tau)) > 1$. Nota-se, também, que $\xi = \pi$ é um ponto crítico pois, para cada uma das curvas de nível, o valor mínimo de ρ correspondente é assumido em $\xi = \pi$.

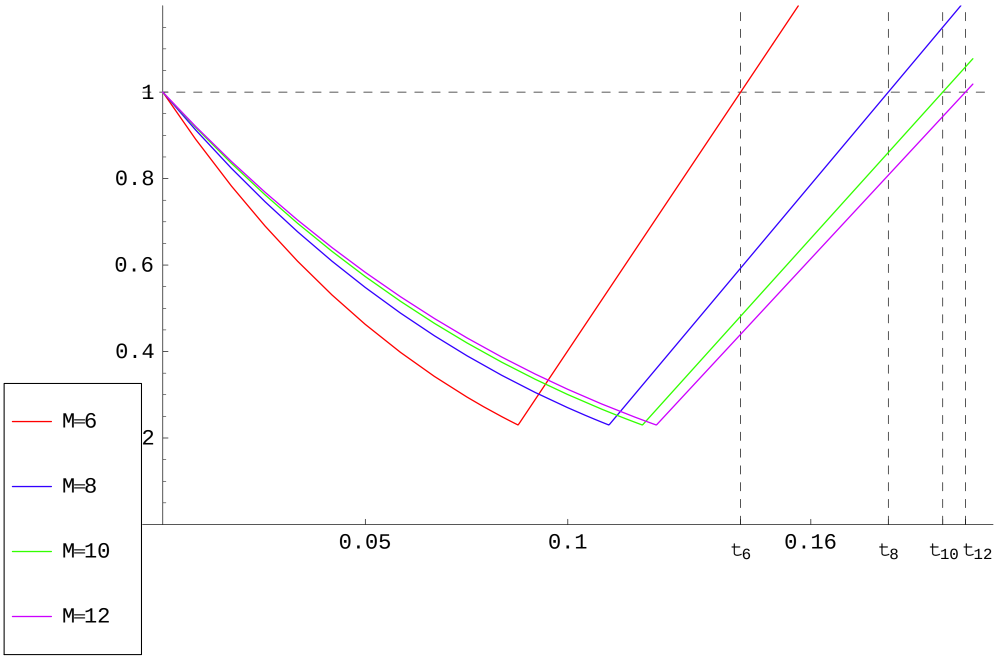
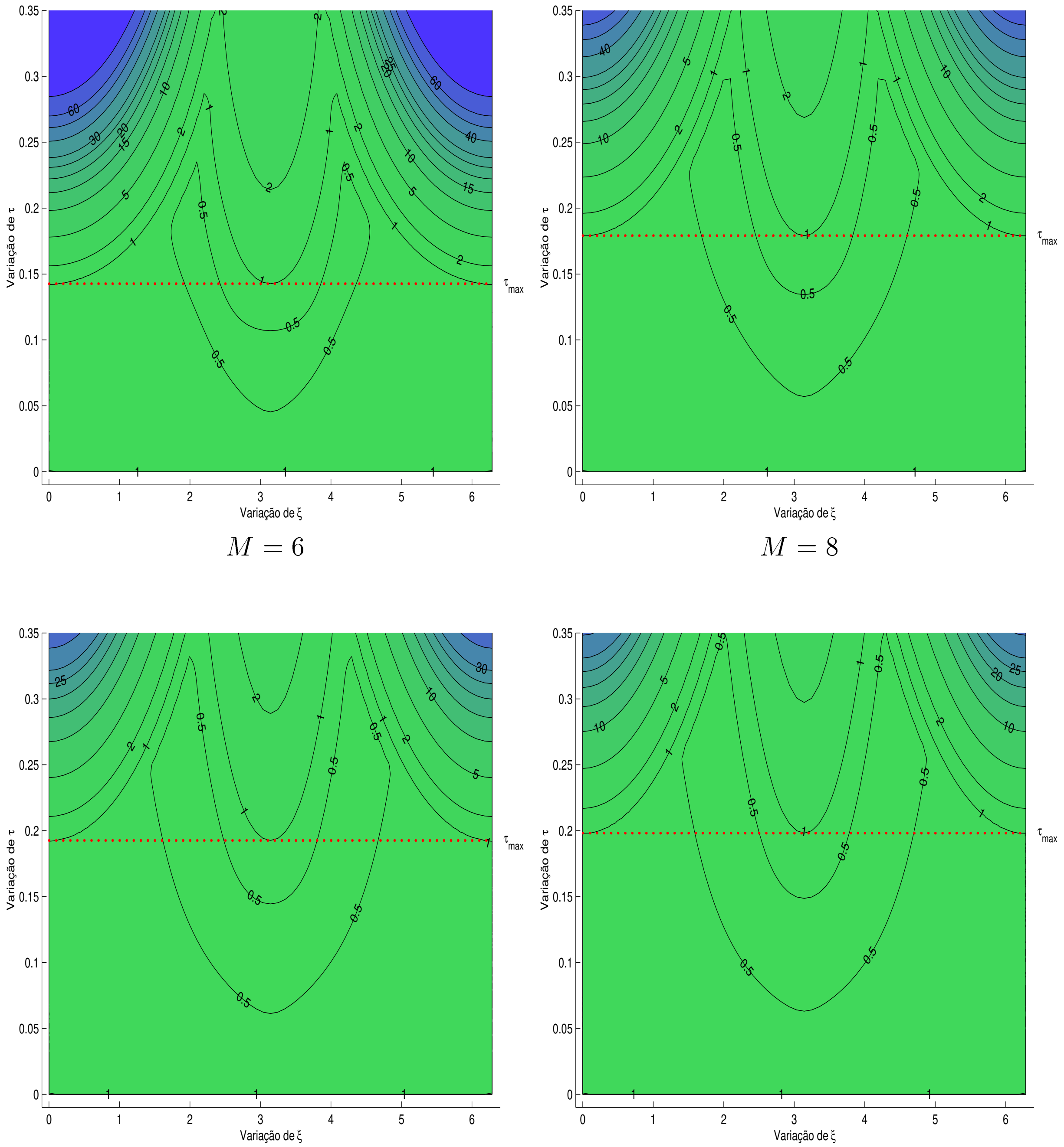


Figura 5.2: Comportamento de $\rho(\widehat{\mathcal{K}}_a(\pi; \tau))$.



$M = 6$ $M = 8$

$M = 10$ $M = 12$

Figura 5.3: Comportamento de $\rho(\widehat{\mathcal{K}}_a(\xi;\tau))$ para $M = 6, 8, 10, 12$

Fixando $\tau = \tau_{\max}$, a Figura (5.4) mostra o comportamento dos autovalores de $\widehat{\mathcal{K}}_a(\xi, \tau_{\max})$, para diferentes escolhas do parâmetro M. Como já foi observado, resulta que

$$|\nu_{k,\ell}| \leq 1 \quad \text{para } \ell = 1, 2,$$

o que mostra que a condição (5.27), necessária para a estabilidade do esquema adaptativo, é satisfeita com $\alpha_e = 0$.

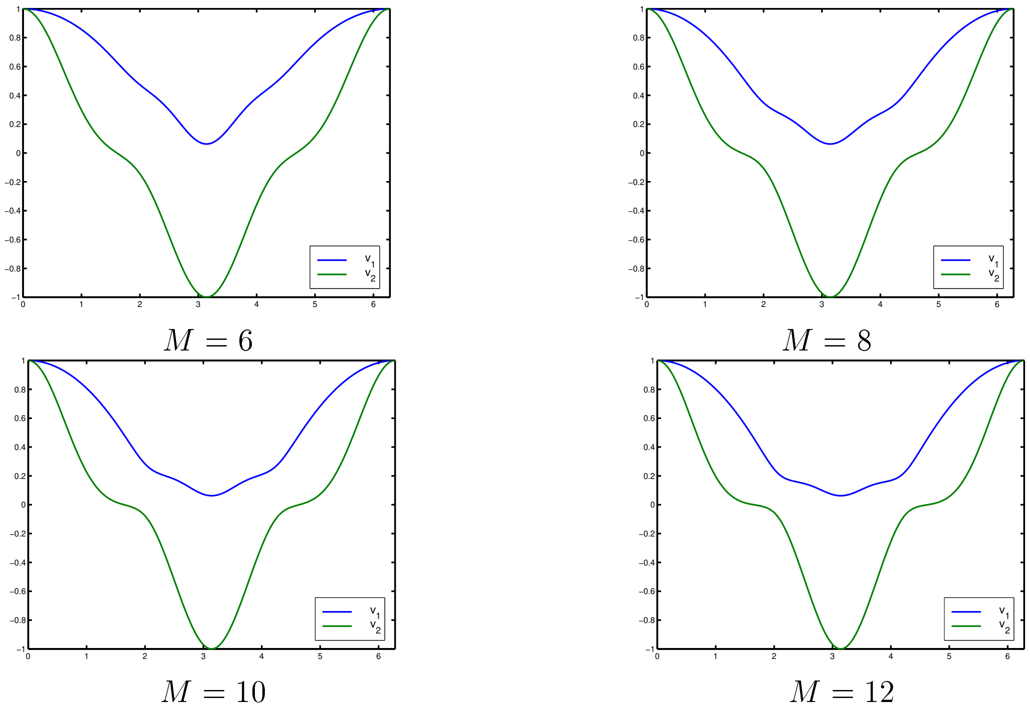


Figura 5.4: Comportamento dos autovalores de $\widehat{\mathcal{K}}(\xi)$ com $\tau = \tau_{\max}$

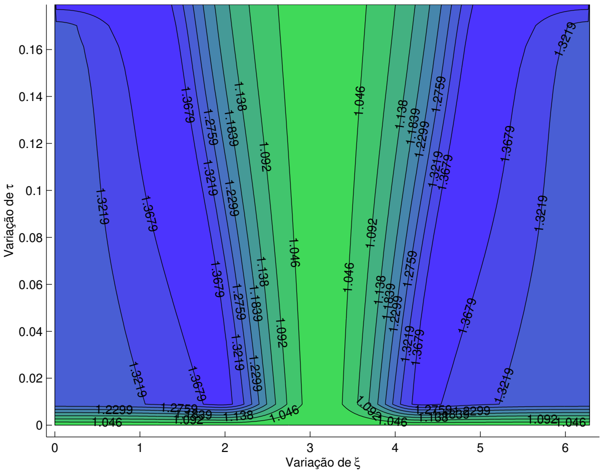
Da Figura (5.4) também pode-se notar que os autovalores são distintos para $\xi \in (0, 2\pi)$. Com isto, a matriz T indicada no Teorema 5.5 é uma matriz diagonal em blocos, formados pelos autovetores do blocos $\hat{\mathcal{K}}_a(2\xi_k^j, \tau)$. Para $\xi = 0$ e $\xi = 2\pi$ o bloco $\widehat{\mathcal{K}}_a(\xi)$ é a matriz identidade 2×2. O comportamento de $T = T(\xi, \tau)$ é ilustrado na Figura 5.5, para $M = 6, 8, 10$ e 12. Nota-se que $0 < C_1 \leq \|T\|_2 \leq C_2$. Portanto segue que a condição sobre T, que garante a estabilidade, é satisfeita pelo esquema adaptativo.

5.4.3 Consistência

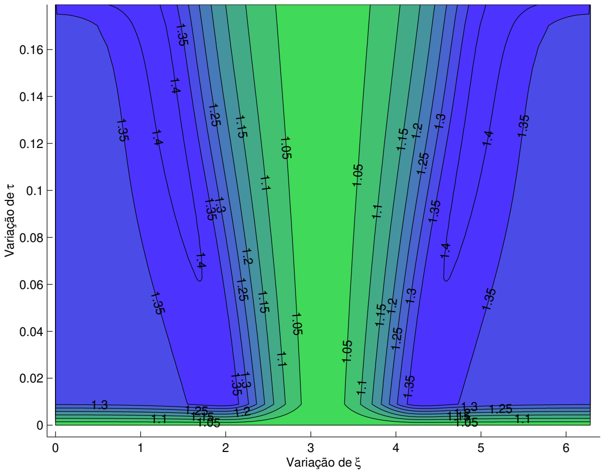
Sendo $u(t, x)$ a solução exata considera-se o erro de truncamento do esquema adaptativo

$$4\Delta_t (ET_a^{n,j})(s) = u(t_n + 4\Delta_t, x_s^j) - (\mathcal{K}_a^j u)(t_n, x_s^j),$$

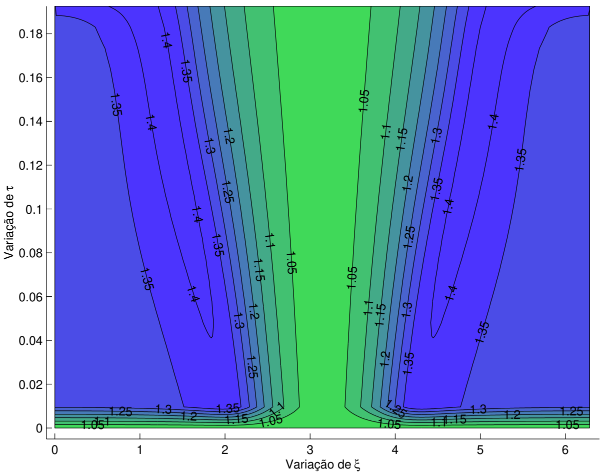
em que $\mathcal{K}_a^j = (I + \Delta_t^j \mathcal{T}^j)^4 + 4\Delta_t^j \mathcal{L}^{j-1}$. Segue o resultado.



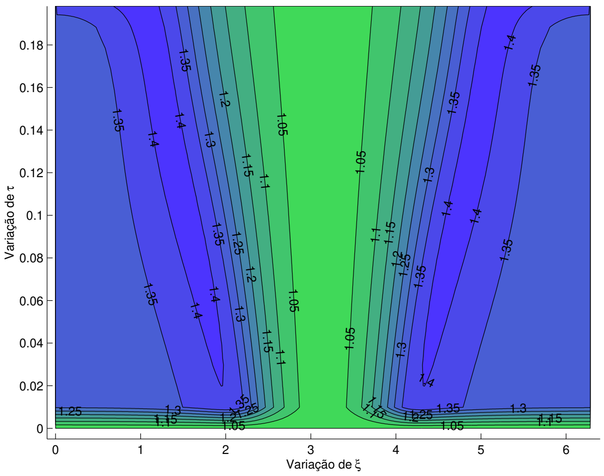
$M = 6$



$M = 8$



$M = 10$



$M = 12$

Figura 5.5: Comportamento da $\|T\|_2$ com $\xi \in [0, 2\pi]$ e $\tau \in [0, \tau_{\max}]$

Teorema 5.6 *O erro de truncamento do esquema adaptativo satisfaz*

$$\|ET_a^{n,j}\| \leq \mathcal{O}(\Delta_t) + \mathcal{O}(2^{-j(M-2)}).$$

Prova: O erro de truncamento pode ser expresso por

$$\begin{aligned}(ET_a^{n,j})(s) &= \left\{\frac{1}{4\Delta_t}\left[u(t_n+4\Delta_t, x_s^j) - u(t_n, x_s^j)\right] - \frac{\partial u}{\partial t}(t_n, x_k^j)\right\} + \left\{(\mathcal{L}u - \mathcal{L}^j u)(t_n, x_k^j)\right\} - \\ &\quad \frac{1}{4}\left[6\Delta_t(\mathcal{T}^j)^2 + 4\Delta_t^2(\mathcal{T}^j)^3 + \Delta_t^3(\mathcal{T}^j)^4\right] u(t_n, x_s^j). \end{aligned} \tag{5.28}$$

Ou seja, a ordem do erro de truncamento do esquema adaptativo depende de três termos. O primeiro é o erro na discretização temporal, que é de ordem Δ_t. O segundo é o erro de truncamento da aproximação do operador $\mathcal{L}$ pelo operador $\mathcal{L}^j$, que como visto no Capítulo 4 é da ordem de $2^{-j(M-2)}$. Como será mostrado a seguir, o terceiro termo introduz erros de ordem superior.

Como o esquema adaptativo em questão é baseado nas funções interpoladoras θ_M, que geram uma base de Riesz, então, de acordo com a Nota 2.3, as estimativas podem, equivalentemente, ser tomadas em termos da norma de $\mathbf{L}^2[0,1]$. Da definição de $\mathcal{T}^j$ tem-se que

$$\|\mathcal{T}^j u\|_{\mathbf{L}^2([0,1])} \leq \|\mathcal{P}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1}u\|_{\mathbf{L}^2([0,1])} + \|\mathcal{Q}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{P}^{j-1}u\|_{\mathbf{L}^2([0,1])} + \|\mathcal{Q}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1}u\|_{\mathbf{L}^2([0,1])}.$$

Os três termos acima podem ser estimados, como indicado na Nota 2.3. Para o primeiro termo é válida a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}\|\mathcal{P}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1}u\|_{\mathbf{L}^2([0,1])} &\leq \|\mathcal{P}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1}u - \mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1}u\|_{\mathbf{L}^2([0,1])} + \|\mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1}u\|_{\mathbf{L}^2([0,1])} \\ &\lesssim 2^{-(j-1)s}\|\mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1}u\|_{\mathbf{H}^s([0,1])} + \|\mathcal{Q}^{j-1}u\|_{\mathbf{H}^2([0,1])} \\ &\lesssim 2^{-(j-1)s}\|\mathcal{Q}^{j-1}u\|_{\mathbf{H}^{s+2}([0,1])} + 2^{-(j-1)(M-2)}\|u\|_{\mathbf{H}^M([0,1])} \\ &\lesssim 2^{-(j-1)(M-2)}\|u\|_{\mathbf{H}^M([0,1])},\end{aligned}$$

em que se toma $0 \leq s \leq r-2$, sendo que r é a ordem de regularidade da função θ_M.

No segundo termo, tem-se

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Q}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{P}^{j-1}u\|_{\mathbf{L}^2([0,1])} &\leq \|\mathcal{Q}^{j-1}\mathcal{L}(\mathcal{P}^{j-1}u - u)\|_{\mathbf{L}^2([0,1])} + \|\mathcal{Q}^{j-1}\mathcal{L}u\|_{\mathbf{L}^2([0,1])} \\ &\lesssim 2^{-(j-1)s}\|\mathcal{L}(\mathcal{P}^{j-1}u - u)\|_{\mathbf{H}^s([0,1])} + 2^{-(j-1)(M-2)}\|\mathcal{L}u\|_{\mathbf{H}^{M-2}([0,1])} \\ &\leq 2^{-(j-1)s}\|\mathcal{P}^{j-1}u - u\|_{\mathbf{H}^{s+2}([0,1])} + 2^{-(j-1)(M-2)}\|u\|_{\mathbf{H}^M([0,1])} \\ &\lesssim 2^{-(j-1)(M-2)}\|u\|_{\mathbf{H}^M([0,1])}.\end{aligned}$$

Finalmente, no terceiro termo segue que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Q}^{j-1}\mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1}u\|_{\mathbf{L}^2([0,1])} &\lesssim 2^{-(j-1)s}\|\mathcal{L}\mathcal{Q}^{j-1}u\|_{\mathbf{H}^s([0,1])} \\ &\leq 2^{-(j-1)s}\|\mathcal{Q}^{j-1}u\|_{\mathbf{H}^{s+2}([0,1])} \\ &\lesssim 2^{-(j-1)(M-2)}\|u\|_{\mathbf{H}^M([0,1])}.\end{aligned}$$

Combinando essas três estimativas, segue que

$$\|\mathcal{T}^j u\|_{\mathbf{L}^2([0,1])} \lesssim 2^{-(j-1)(M-2)} \|u\|_{\mathbf{H}^M([0,1])}.$$

Portanto, somando cada uma das contribuições dos termos de (5.28) conclue-se que

$$\|ET_a^{n,j}\| \leq \mathcal{O}(\Delta_t) + \mathcal{O}(2^{-j(M-2)}),$$

ou seja o esquema é consistente com a mesma ordem do esquema não adaptado.

Os resultados da Seção 5.4.2 e 5.4.3 podem ser resumidos no seguinte teorema

Teorema 5.7 *O esquema adaptativo (5.21) satisfaz as mesmas propriedades de estabilidade e consistência do esquema não adaptativo correspondente.*

5.4.4 Estrutura do Esquema em Multinível

O mesmo procedimento pode ser repetido para calcular a solução em $t + 4^2\Delta_t^j$, iterando quatro vezes os operadores em (5.21), obtendo

$$u_j(t + 4^2\Delta_t^j, x) = [(I + \Delta_t^j \mathcal{T}^j)^4 + 4\Delta_{t_j}\mathcal{L}^{j-1}]^4 u_j(t, x). \tag{5.29}$$

Decompondo $\mathcal{L}^{j-1} = \mathcal{L}^{j-2} + \mathcal{T}^{j-1}$ e aplicando o mesmo procedimento aplicado a dois níveis, obtém-se

$$\begin{aligned} u_j(t + 4^2\Delta_t^j, x) &= [((I + \Delta_t^j \mathcal{T}^j)^4 + 4\Delta_t^j \mathcal{T}^{j-1})^4 + 4^2\Delta_{t_j}\mathcal{L}^{j-2}] u_j(t, x) \\ &= \mathcal{K}_{a,2}^j u_j(t, x). \end{aligned}$$

Analogamente, um esquema geral pode ser formulado em mais níveis de decomposição, seguindo as mesmas idéias acima. Para calcular a solução em um nível de tempo $t + 4^p\Delta_t^j$, obtém-se o esquema, em que

$$\mathcal{K}_{a,p}^j = (\ldots(I + \Delta_t^j \mathcal{T}^j)^4 + 4\Delta_t^j \mathcal{T}^{j-1})^4 + \cdots 4^{p-1}\Delta_t^j \mathcal{T}^{j-p-1})^4 + 4^p\Delta_{t_j}\mathcal{L}^{j-p}.$$

Capítulo 6

Equação Não Linear

Neste capítulo, considera-se a Equação de Burger

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}(t,x) = \mathcal{L}U(t,x), & x \in \mathbb{R},\ t \geq 0, \\ \\ U(0,x) = U_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{6.1}$$

em que

$$\mathcal{L}U = \varepsilon \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - u\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Na literatura, este tipo de equação tem recebido considerável atenção, tanto do ponto de vista teórico como do ponto de vista numérico. A evolução temporal da solução é controlada pela interação entre o termo de difusão linear e o termo de advecção não linear. Se o parâmetro de difusão ε for pequeno, então o termo convectivo pode ser dominante e acarretar a formação de fortes gradientes em intervalos de magnitude $O(\varepsilon)$. Por isto, este é um modelo não linear típico para testes de esquemas numéricos.

Consideram-se soluções que sejam regulares e periódicas $U(t, x+1) = U(t, x)$. De acordo com [2], Theorem 5.51, assumindo que a condição inicial U_0 e suas derivadas sejam funções contínuas e limitadas, resulta que a solução $U(x,t)$ também satisfaz as mesmas condições e

$$\max_{x,t} \left| \frac{\partial^{p+q} U}{\partial x^p \partial t^q} \right| \leq C_{p,q}\varepsilon^{-(p+q)}. \tag{6.2}$$

Neste capítulo, o método adotado baseia-se no esquema de colocação correspondente ao operador de interpolação definido pelas funções básicas $\phi(x) = \theta_M(x)$. Para a discretização temporal, utiliza-se o esquema implícito de Crank-Nicholson. O objetivo é mostrar que a análise descrita em [2], no caso de diferenças finitas de segunda ordem, também pode ser estendida para tais esquemas de colocação de ordem superior. Com este fim, primeiramente é feita a análise da consistência. A seguir, a convergência é obtida através do estudo da estabilidade do problema linearizado correspondente.

6.1 O Esquema Discreto: Colocação

Considerando a solução numérica $u_j(t,x)$ pertencente ao espaço V_j gerado pelas funções básicas $\theta_M(2^jx-k)$, obtém-se o problema semidiscreto

$$\frac{\partial u_j(t,x)}{\partial t} = \mathcal{L}^j u_j(t,x), \tag{6.3}$$

em que

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}^j\mathbf{v}](\ell) &= \varepsilon 2^{2j}\sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\beta^{(2)}(\ell-k) - v(\ell)2^j\sum_{k\in\mathbb{Z}} v(k)\beta^{(1)}(\ell-k) \\ &= \varepsilon[\mathcal{B}_2^j\mathbf{v}](\ell) - v(\ell)[\mathcal{B}_1^j\mathbf{v}](\ell). \end{aligned} \tag{6.4}$$

A presença do termo de advecção faz com que a discretização na variável temporal, usando o método de Euler, não apresente boas propriedades de estabilidade [2]. Portanto, adota-se o esquema implícito do tipo Crank-Nicholson dado por

$$\left(I - \frac{1}{2}\Delta_t\mathcal{L}^j\right) u_j(t_n+\Delta_t, x) = \left(I + \frac{1}{2}\Delta_t\mathcal{L}^j\right) u_j(t_n, x). \tag{6.5}$$

Sejam $u^{n,j}(k) = u_j(n\Delta_t, k2^{-j})$ os valores pontuais da solução numérica na malha do nível j e no n-ésimo passo do tempo, que são os coeficientes da expansão de $u_j(n\Delta_t, x)$. Assim, $\mathbf{u}^{n+1,j}$ se relaciona com $\mathbf{u}^{n,j}$ da seguinte forma

$$\mathbf{u}^{n+1,j} = \mathcal{K}^j\mathbf{u}^{n,j}, \tag{6.6}$$

em que

$$\mathcal{K}^j = \left(I - \frac{1}{2}\Delta_t\mathcal{L}^j\right)^{-1}\left(I + \frac{1}{2}\Delta_t\mathcal{L}^j\right). \tag{6.7}$$

6.2 Erro de Truncamento

Sendo $U(t,x)$ a solução exata do problema (6.1) e seguindo a definição do erro de truncamento (5.2), segue que

$$\begin{aligned} (ET^{n+1/2,j})(U)(s) &= \left\{\frac{1}{\Delta_t}\left[U(t_{n+1},x_s^j) - U(t_n,x_s^j)\right] - \frac{\partial U}{\partial t}(t_{n+1/2},x_s^j)\right\} \\ &+ \left\{\mathcal{L}U(t_{n+1/2},x_s^j) - \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}^jU(t_{n+1},x_s^j) + \mathcal{L}^jU(t_n,x_s^j)\right]\right\} \\ &= \text{(I)} + \text{(II)}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Logo, o erro de truncamento pode ser expresso pela soma de dois tipos de erro local, no tempo $t_{n+1/2}$. O primeiro termo (I) corresponde ao erro de truncamento do operador de discretização na variável temporal, e o segundo termo (II) corresponde ao erro de truncamento quando aproxima-se o operador $\mathcal{L}$ pela média do operador discreto aplicado nos níveis de tempo $n+1$ e n.

Teorema 6.1 *O esquema (6.6) é consistente, com ordem $(2, M-2)$. Precisamente, o erro de truncamento (6.8) tem a seguinte forma*

$$|(ET^{n+1/2,j})(U)(s)| \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_k^1(s)(\Delta_t)^{2k} + \sum_{k=M/2}^{\infty} C_k^2(s)2^{-j(2k-2)}. \tag{6.9}$$

Os coeficientes C_k^1 dependem das derivadas parciais de U com relação a t em $(t_{n+1/2}, x_s^j)$, de ordens $2k$ e $2k+1$, e os coeficientes C_k^2 dependem de ε e das derivadas parciais de U com relação a x, de ordens $2k$ e $2k+1$, em $(t_{n+1/2}, x_m^j)$, com x_m^j numa vizinhança de x_s^j determinada pelo suporte de $\mathcal{L}^j$.

<u>Prova:</u> Considerando uma função $v(t) \in \mathbf{C}^\infty$, pela série de Taylor em torno do ponto $t_{n+1/2}$, tem-se que

$$v(t_{n+1}) - v(t_n) \sim 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!}\left(\frac{\Delta_t}{2}\right)^{2k+1} \frac{d^{2k+1}v}{dt^{2k+1}}(t_{n+1/2}), \tag{6.10}$$

$$v(t_{n+1}) + v(t_n) \sim 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\left(\frac{\Delta_t}{2}\right)^{2k} \frac{d^{2k}v}{dt^{2k}}(t_{n+1/2}). \tag{6.11}$$

Desta forma, por intermédio de (6.10), o termo (I) do erro de truncamento pode ser expresso por

$$(\mathrm{I}) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta_t}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(2k+1)!}\frac{\partial^{2k+1}U}{\partial t^{2k+1}}(t_{n+1/2}, x_s^j). \tag{6.12}$$

Considerando $v(t) = (\mathcal{L}^j U)(t, x_s^j)$, segue de (6.11) que

$$\frac{1}{2}\left[\mathcal{L}^j U(t_{n+1}, x_s^j) + \mathcal{L}^j U(t_n, x_s^j)\right] \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\left(\frac{\Delta_t}{2}\right)^{2k} \mathcal{L}^j\left(\frac{\partial^{2k}U}{\partial t^{2k}}\right)(t_{n+1/2}, x_s^j).$$

Portanto, o termo (II) pode ser expresso da seguinte forma

$$(\mathrm{II}) \sim \left(\mathcal{L} - \mathcal{L}^j\right) U(t_{n+1/2}, x_s^j) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\left(\frac{\Delta_t}{2}\right)^{2k} \mathcal{L}^j\left(\frac{\partial^{2k}U}{\partial t^{2k}}\right)(t_{n+1/2}, x_s^j). \tag{6.13}$$

Tendo em vista a definição de $\mathcal{L}^j$ como um operador em diferenças finitas, cada termo do somatório em (6.13) é uma soma finita de valores das derivadas de U, de ordem $2k$, em relação a variável t no ponto $(t_{n+1/2}, x_m^j)$, com x_m^j numa vizinhança de x_s^j determinada pelo suporte de $\mathcal{L}^j$. Por outro lado, tem-se que

$$\left(\mathcal{L} - \mathcal{L}^j\right) U(t_{n+1/2}, x_s^j) = \varepsilon\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \mathcal{B}_2^j U\right)(t_{n+1/2}, x_s^j) - U(t_{n+1/2}, x_s^j)\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \mathcal{B}_1^j U\right)(t_{n+1/2}, x_s^j).$$

Com isto, dos resultados do Corolário 4.1 segue que

$$
\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}-\mathcal{L}^j\right)U(t_{n+1/2},x_s^j) \quad &\sim \quad \varepsilon \sum_{k=M/2} C_k^3 2^{-j(2k-2)} \frac{\partial^{2k}U}{\partial x^{2k}}(t_{n+1/2},x_s^j) \\
&\qquad -U(t_{n+1/2},x_s^j) \sum_{k=M/2} C_k^4 2^{-j(2k)} \frac{\partial^{2k+1}U}{\partial x^{2k+1}}(t_{n+1/2},x_s^j), \quad (6.14)
\end{aligned}
$$

em que os coeficientes C_k^3 e C_k^4 dependem apenas de M. Substituindo a expressão (6.14) em (6.13), o enunciado do teorema segue como conseqüência da soma das contribuições dos termos em (6.12) e (6.13). ■

6.3 Convergência

A teoria clássica apresentada na Seção 5.2 não se aplica a problemas não lineares. Neste caso, para soluções suficientemente suaves, a convergência pode ser estabelecida desde que o problema linearizado seja estável, como é descrito a seguir.

Sendo U a solução exata do problema (6.1), considera-se o erro dado por

$$2^{-j\eta}e = u_j - U,$$

em que $\eta = M-2$ é a ordem do erro de truncamento na variável espacial.

Adota-se a notação $U^{n,j}(k) = U(n\Delta_t, k2^{-j})$ para os valores pontuais da solução exata e $u^{n,j}(k) = u_j(n\Delta_t, k2^{-j})$ os valores pontuais da solução aproximada. Conseqüentemente, o erro $\mathbf{e}^{n,j}$ satisfaz a condição inicial $\mathbf{e}^0 = 0$ e

$$
\begin{aligned}
\left[I - \frac{1}{2}\Delta_t\left(\mathcal{L}_0^j[U^{n+1,j}] - 2^{-j\eta}\mathbf{e}^{n+1,j}\mathcal{B}_1^j\right)\right]\mathbf{e}^{n+1,j} \quad &= \quad \left[I + \frac{1}{2}\Delta_t\left(\mathcal{L}_0^j[U^{n,j}] - 2^{-j\eta}\mathbf{e}^{n,j}\mathcal{B}_1^j\right)\right]\mathbf{e}^{n,j} \\
&+ \quad \Delta_t\mathcal{F}^{n+1/2,j}, \qquad (6.15)
\end{aligned}
$$

em que $2^{-j\eta}\mathcal{F}^{n+1/2,j} = ET^{n+1/2,j}(U)$ é o erro de truncamento dado em (6.8) e

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_0^j[U^{n,j}]e^{n,j}(s) \quad &= \quad \varepsilon\mathcal{B}_2^j e^{n,j}(s) - U^{n,j}(s)\mathcal{B}_1^j e^{n,j}(s) - e^{n,j}(s)(\mathcal{B}_1^j U^{n,j}(s)) \\
&= \quad \mathcal{L}^j[U^{n,j}]e^{n,j}(s) - e^{n,j}(s)(\mathcal{B}_1^j U^{n,j}(s)).
\end{aligned}
$$

Aqui usa-se a notação $\mathcal{L}^j[U^{n,j}]$ para indicar e dar ênfase que o operador depende de coeficientes variáveis $U^{n,j}$.

Para uma primeira aproximação, considera-se a parte linear da equação (6.15), isto é,

$$\left[I - \frac{1}{2}\Delta_t\mathcal{L}_0^j[U^{n+1,j}]\right]\mathbf{e}^{n+1,j} = \left[I + \frac{1}{2}\Delta_t\mathcal{L}_0^j[U^{n,j}]\right]\mathbf{e}^{n,j} + \Delta_t\mathcal{F}^{n+1/2,j}. \qquad (6.16)$$

Observa-se que esta formulação corresponde à discretização de um problema linear com coeficientes variáveis e termo de fonte. Tendo em vista que $ET^{n+1/2,j}(U) = \mathcal{O}({\Delta_t}^2) + \mathcal{O}(2^{-j\eta})$, o termo $\Delta_t \mathcal{F}^{n+1/2,j}$ pode ser interpretado como um termo de fonte de ordem Δ_t. Logo, do Teorema 5.3, segue que o esquema (6.16) é estável se o esquema do problema homogêneo for estável. Para problemas homogêneos com coeficientes variáveis, a condição de estabilidade é dado pelo seguinte Teorema (ver Gustafsson [2] pag 185)

Teorema 6.2 *Um esquema do tipo (6.16) é estável se o operador $\mathcal{L}_0^j$ for semilimitado. Isto é, para toda função discreta $\mathbf{w}^j$*

$$\mathbf{Re}(\mathbf{w}^j, \mathcal{L}_0^j \mathbf{w}^j) \leq \alpha \|\mathbf{w}^j\|_j^2,$$

em que α independe de $x, t, \mathbf{w}^j$ e

$$(\mathbf{u}^j, \mathbf{v}^j) = 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} u^j(k) v^j(k).$$

Logo, segue o resultado apresentado no teorema

Teorema 6.3 *O esquema (6.16) é estável.*

Prova: Para mostrar a estabilidade do esquema (6.16), basta mostrar que $\mathcal{L}_0^j$ é semilimitado. Da definição do operador $\mathcal{L}_0^j$ segue que

$$\mathbf{Re}(\mathbf{w}^j, \mathcal{L}_0^j \mathbf{w}^j) = -\mathbf{Re}(\mathbf{w}^j, U^{n,j} \mathcal{B}^j{}_1 \mathbf{w}^j) + \varepsilon \mathbf{Re}(\mathbf{w}^j, \mathcal{B}^j{}_2 \mathbf{w}^j) - \mathbf{Re}(\mathbf{w}^j, \mathbf{w}^j \mathcal{B}_1^j U^{n,j}). \tag{6.17}$$

Para o primeiro termo, segue que

$$\begin{aligned}
\mathbf{Re}(\mathbf{w}^j, U^{n,j} \mathcal{B}^j{}_1 \mathbf{w}^j) &= 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} w^j(k) U^{n,j}(k) (\mathcal{B}_1^j w^j)(k) \\
&= \sum_m \beta^{(1)}(m) \sum_{k=0}^{2^j-1} w^j(k) U^{n,j}(k) w^j(k-m) \\
&= \sum_{m>1} \beta^{(1)}(m) \sum_{k=0}^{2^j-1} w^j(k) w^j(k-m) (U^{n,j}(k) - U^{n,j}(k-m)) \\
&\leq C_1 \|\mathbf{w}^j\|_j^2.
\end{aligned}$$

Nos cálculos acima, considera-se o fato de que $\mathbf{w}^j$ e $U^{n,j}$ são dados periódicos e que U é uma função Lipschitz contínua de tal forma que $|U^{n,j}(k) - U^{n,j}(k+1)| \leq C 2^{-j}$. No segundo termo, tem-se que

$$\mathbf{Re}(\mathbf{w}^j, \mathcal{B}_2^j \mathbf{w}^j) = 2^j \sum_{m \in \mathbb{Z}} \beta^{(2)}(m) \sum_{k=0}^{2^j-1} w^j(k) w^j(k-m)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2^j \left(\beta^{(2)}(0) \sum_{k=0}^{2^j-1} w^j(k) w^j(k) + 2 \sum_{m\geq 1} \beta^{(2)}(m) \sum_{k=0}^{2^j-1} w^j(k) w^j(k+m) \right) \\
&\leq 2^{2j} \left(\beta^{(2)}(0) + 2 \sum_{m\geq 1} \beta^{(2)}(m) \right) \|\mathbf{w}^j\|_j^2 \\
&\leq 0,
\end{aligned}
$$

em que se usa o fato de que os coeficientes $\beta^{(2)}(k)$ satisfazem a condição de normalização $\sum_k \beta^{(2)}(k) = 0$ descrita no Lema 2.1. Finalmente, no terceiro termo, segue que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Re}(\mathbf{w}^j, \mathbf{w}^j \mathcal{B}_1^j U^{n,j}) &= 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} w^j(k) w^j(k) (\mathcal{B}_1^j U^{n,j})(k) \\
&= \sum_{k=0}^{2^j-1} w^j(k) w^j(k) \sum_{m\in\mathbb{Z}} U^{n,j}(m) \beta^{(2)}(k-m) \\
&\leq C_2 \, \|\mathbf{w}^j\|_j^2.
\end{aligned}
$$

Portanto,das contribuições de cada termo conclue-se o teorema. ■

Seja $(e^{n,j})^0$ a solução da equação linearizada (6.16). Por intermédio do Teorema 5.2, obtém-se a seguinte estimativa

$$
2^{-j\eta} \|(\mathbf{e}^{n,j})^0\|_j \lesssim \max_{0\leq \ell \leq n-1} \|ET^{\ell+1/2,j}(U)\|_j. \tag{6.18}
$$

Para estimar a solução de (6.15) sem desprezar os termos não lineares, usa-se os resultados do Teorema C.2 apresentado no Apêndice C. Fixando o intervalo de tempo em $0 \leq t \leq T = N_t \Delta_t$ pode-se expressar a evolução temporal da equação (6.15) na seguinte forma matricial

$$
\mathbf{A}\mathbf{e} + \kappa \mathbf{f}(\mathbf{e}) = \mathbf{b}, \tag{6.19}
$$

em que

$$
\begin{aligned}
\kappa &= 2^{-j\eta}, \\
\mathbf{e} &= (e^{N,j}, e^{N-1,j}, \ldots, e^{1,j}), \\
\mathbf{b} &= (\mathcal{F}^{N-1/2,j}, \mathcal{F}^{N-3/2,j}, \ldots, \mathcal{F}^{1/2,j}), \\
\mathbf{f}(\mathbf{e}) &= \frac{1}{2}(e^{N,j}\mathcal{B}_1^j e^{N,j}, e^{N-1,j}\mathcal{B}_1^j e^{N-1,j}, \ldots, e^{1,j}\mathcal{B}_1^j e^{1,j}) \\
&\quad + \frac{1}{2}(e^{N-1,j}\mathcal{B}_1^j e^{N-1,j}, e^{N-1,j}\mathcal{B}_1^j e^{N-1,j}, \ldots, e^{0,j}\mathcal{B}_1^j e^{0,j}),
\end{aligned}
$$

e $\mathbf{A}$ denota a matriz $N \times N$ de operadores cujos elementos são a parte linear da equação, a saber,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1^j[U^{N,j}] & -\mathcal{A}_2^j[U^{N-1,j}] & & & & \\ & \mathcal{A}_1^j[U^{N-1,j}] & -\mathcal{A}_2^j[U^{N-2,j}] & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mathcal{A}_1^j[U^{2,j}] & -\mathcal{A}_2^j[U^{1,j}] & \\ & & & & \mathcal{A}_1^j[U^{1,j}] & \end{bmatrix},$$

em que

$$\mathcal{A}_1^j[U^{n,j}] = \left(I - \frac{1}{2}\Delta_t \mathcal{L}_0^j[U^{n,j}]\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{A}_2^j[U^{n,j}] = \left(I + \frac{1}{2}\Delta_t \mathcal{L}_0^j[U^{n,j}]\right).$$

Seja $\mathbf{e}^0 = (e^{n,j})^0$ a solução do problema linearizado (6.16). O objetivo é mostrar que o processo iterativo

$$\mathbf{A}\mathbf{e}^{k+1} + \kappa\mathbf{f}(\mathbf{e}^k) = \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, \dots \tag{6.20}$$

é convergente para a única solução do problema (6.19) numa vizinhança de $\mathbf{e}^0$. Para isto, utiliza-se os resultados do teorema indicado a seguir [2], cuja demonstração foi incluída no Apêndice C. Este teorema também fornece estimativas para tal solução.

Consideram-se as normas $|\mathbf{e}| = \max_n \|e^n\|_j$ e $|\mathbf{e}|_\infty = \max_{n,k} |e^n(x_k^j)|$ e observa-se que

$$|\mathbf{e}|_\infty^2 \leq \sum_{k=0}^{2^j-1} |e^{n,j}(k)|^2 \leq 2^j \max_n \|e^n\|_j^2 \leq 2^j |\mathbf{e}|^2.$$

Teorema 6.4 *Seja $\mathbf{f}(x)$ uma função localmente Lipschitz contínua, sendo $L = L(\mathbf{e}^0, 1)$ a constante Lipschitz para a bola $|\tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{e}^0| < 1$. Se $\sigma = \kappa|\mathbf{A}^{-1}|L < 1$ é tal que*

$$\frac{\kappa}{1-\sigma}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{e}^0)| < 1, \tag{6.21}$$

então a equação (6.19) tem solução $\mathbf{e}$ com

$$|\mathbf{e} - \mathbf{e}^0| \leq \frac{\kappa}{1-\sigma}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{e}^0)| < 1 \tag{6.22}$$

e o processo iterativo (6.20) é convergente, com $\lim_{k\to\infty} \mathbf{e}^k = \mathbf{e}$. Além disto, não existe outra solução na bola $|\tilde{\mathbf{e}} - \mathbf{e}^0| < 1$.

No caso em questão, tem-se que

$$|\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{v})|^2 \;\; = \;\; \max_n \|u^{n,j}\mathcal{B}_1^j u^{n,j} - v^{n,j}\mathcal{B}_1^j v^{n,j}\|_j^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \max_n 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |u^{n,j}(k)\mathcal{B}_1^j u^{n,j}(k) - v^{n,j}(k)\mathcal{B}_1^j v^{n,j}(k)|^2 \\
&= \max_n 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} |(u^{n,j}(k) - v^{n,j}(k))\mathcal{B}_1^j u^{n,j}(k) + v^{n,j}(k)\mathcal{B}_1^j (u^{n,j}(k) - v^{n,j}(k))|^2 \\
&\lesssim 2^{2j}(|\mathbf{u}|_\infty^2 + |\mathbf{v}|_\infty^2) \max_n \|u^n - v^n\|_j^2 \\
&\lesssim 2^{3j}(|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2)|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2.
\end{aligned}
$$

Ou seja, segue que

$$
|\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{v})| \lesssim 2^{3j/2}(|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2)^{1/2}|\mathbf{u} - \mathbf{v}|. \tag{6.23}
$$

Com isto conclue-se que $\mathbf{f}$ é localmente Lipschitz contínua e com a constante Lipschitz satisfazendo $L(\mathbf{e}^0, 1) \leq C|\mathbf{e}^0|2^{3j/2}$.

A estabilidade do esquema linear (6.16) garante que a matriz $\mathbf{A}$ admite inversa e

$$
|\mathbf{A}^{-1}| \leq K.
$$

Com isto considera-se

$$
\sigma = \kappa|\mathbf{A}^{-1}|L \leq 2^{-j(\eta-3/2)}KC|\mathbf{e}^0| \lesssim 2^{-j(\eta-3/2)}|e^0|. \tag{6.24}
$$

Além disso, sendo $\mathbf{f}(0) = 0$, da equação (6.23) segue que

$$
|\mathbf{f}(\mathbf{e}^0)| \lesssim 2^{3j/2}|\mathbf{e}^0|^2.
$$

Logo

$$
\frac{\kappa}{1-\sigma}|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{e}^0)| \lesssim 2^{-j(\eta-3/2)}|e^0|. \tag{6.25}
$$

Portanto as hipóteses do Teorema 6.4 são plenamente satisfeitas para 2^{-j} suficientemente pequeno de tal forma que (6.24) e (6.25) sejam menores que um. Assim, a equação (6.15) tem uma solução única $\mathbf{e}$ com

$$
\max_n \|e^n\|_j \lesssim \max \|(e^n)^0\|_j \lesssim 2^{j\eta} \max_n \|ET^{n+1/2,j}(U)\|_j.
$$

Portanto

$$
\|U^{n,j} - u^{n,j}\|_j = 2^{-\eta j}\|e^{n,j}\|_j \lesssim \max_n \|ET^{n+1/2,j}(U)\|_j.
$$

Considerando a estimativa do erro de truncamento em (6.9) tem-se o seguinte resultado

Teorema 6.5 *O esquema (6.15) é convergente quando Δ_t e $h = 2^{-j}$ tenderem a zero, mantendo constante $\Delta_t^2\, h^{-(M-2)}$, e*

$$
\|U^{n,j} - u^{n,j}\|_j = O(h^{M-2}).
$$

Tendo em vista o fato de que as constantes assintóticas do erro de truncamento dependem das derivadas parciais de U, podendo ser até de ordem $M+1$, e conhecendo a estimativa a priori (6.2), a estimativa do erro indica que, para o método ser eficiente, é necessário ter

$$h^{M-2}\varepsilon^{-M+1} \ll 1.$$

Nos casos em que o termo difusivo for pequeno, $\varepsilon \ll 1$, este critério pode implicar severas restrições sobre os parâmetros de discretização. A solução que tem sido adotada é a de métodos adaptativos, com resolução mais refinada nas regiões de fortes gradientes. Neste sentido, uma representação da solução numérica em termos de wavelets pode ser útil, tanto para detectar tais regiões, quanto para modelar estratégias mais econômicas, mantendo uma precisão desejada.

Capítulo 7

Conclusões e Futuras Pesquisas

Este trabalho contribui com aplicações do conceito de análise de multirresolução biortogonal na análise numérica de equações diferenciais, dando ênfase em estratégias para a discretização de operadores não lineares e na análise da consistência e estabilidade de um esquema adaptativo na variável temporal.

Usando um formalismo apresentado por Harten [24] e Cullen-Morton [13], no Capítulo 3 são descritos vários esquemas de aproximação, $\{\mathcal{D}_c^j, \mathcal{R}^j\}$, em que o operador $\mathcal{D}_c^j$ é uma forma alternativa para a discretização biortogonal. Foram analisados os casos associados aos operadores de interpolação, quase interpolação e projeção discreta. Em todos os casos, o operador de discretização é um funcional definido como uma combinação de valores pontuais. Em termos de ordem de aproximação, os esquemas $\{\mathcal{D}_c^j, \mathcal{R}^j\}$ possuem a mesma ordem dos esquemas de projeção biortogonal. São apresentados os detalhes de tais esquemas para as splines biortogonais $\{\phi_{N^*}, \phi_{N.N^*}\}$.

Em geral, o operador de discretização no esquema de interpolação requer um número infinito de termos não nulos, o que dificulta a implementação computacional. Tanto o esquema de quase interpolação quanto o de projeção discreta podem ser definidos com um número finito de termos não nulos, sendo que na quase interpolação o número é aproximadamente a metade do que ocorre na projeção discreta. Em princípio, este fato poderia representar uma vantagem dos esquemas de quase interpolação sobre os esquemas de projeção discreta.

No entanto, quando os esquemas são representados em multinível, usando o Algoritmo de Análise usual, a precisão nos coeficientes wavelets dos níveis menos refinados fica prejudicada. Para contornar esta dificuldade, é adotado o algoritmo de Análise Modificado, que permite melhorar a precisão nos níveis inferiores. Porém, é essencial que o esquema de aproximação $\{\mathcal{D}_c^j, \mathcal{R}^j\}$ seja conservativo. Esta é uma restrição negativa para os esquemas de quase interpolação. Então, conclui-se que, para $N^* > 0$, o esquema de projeção discreta é a opção mais adequada, entre as opções analisadas, para aplicações que envolvam o cálculo de termos não lineares no contexto de multirresolução.

No Capítulo 4 aplicam-se os esquemas de aproximação, definidos no Capítulo 3, na discretização de operadores diferenciais. De modo geral, os esquemas do tipo Petrov-Galerkin são mais complicados para serem implementados computacionalmente no tratamento de termos não lineares. Por esta razão, investiga-se o emprego de estratégias híbridas, em termos de valores pontuais. Uma desvantagem que os esquemas híbridos apresentam com relação ao esquema de Petrov-Galerkin é referente à ordem do erro de truncamento. Enquanto no esquema de Petrov-Galerkin ocorre a *superconvergência* de ordem $N + N^*$, em que $N - 1$ é a ordem da *CSF* das funções trial e $N^* - 1$ é a das funções teste, nos esquemas híbridos a ordem é a usual, ou seja, a ordem de aproximação N permitida pelos espaços aproximantes V^j.

No Capítulo 5, mostra-se que esquemas em multiescala permitem que o passo de tempo seja adaptado de acordo com a escala de cada componente. Para o esquema proposto em [1], mostra-se que as condições de estabilidade e consistência do esquema adaptativo são as mesmas do esquema clássico correspondente, com a vantagem adicional de poder ser mais eficiente, computacionalmente, quando aplicado a problemas que exijam escalas muito refinadas em certas regiões de variação brusca.

No Capítulo 6, considera-se o esquema de colocação aplicado ao problema não linear da equação de Burger. Observa-se que, dentre as possibilidades analisadas no Capítulo 4, este é o esquema que dá a vantagem da maior ordem do erro de truncamento do termo não linear combinada com o fato do esquema ser formulado em termos de valores pontuais. Na análise de convergência, mostra-se que o erro entre a solução exata e a solução numérica, pode ser estimado pelo erro de truncamento, desde que o problema linear associado seja estável. Isto dá ênfase à importância da análise feita nos capítulos anteriores.

7.1 Futuras Pesquisas

Seguindo esta linha de pesquisa, os próximos pontos a serem abordados são:

- Combinar os esquemas híbridos com a adaptabilidade espacial.
- Análise do erro, consistência e estabilidade usando a teoria de aproximação não linear.
- Formulação de novas propostas de adaptabilidade temporal que sejam incondicionalmente estáveis (esquemas implícitos).
- Implementação computacional dos algoritmos em problemas relevantes de interesse.

Apêndice A

Matrizes Circulantes

Neste apêndice são apresentados alguns resultados sobre matrizes circulantes necessários na análise da estabilidade feita na Seção 5.4. As demonstrações, como também resultados mais gerais, podem ser encontrados em Davis [17].

Definição A.1 *Uma matriz é circulante, de ordem n, se esta é uma matriz quadrada $n \times n$ e os elementos de uma linha também são os elementos da linha anterior, mas deslocados de uma posição à direita, isto é*

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{pmatrix}.$$

A representação da matriz circulante pode ser feita pela primeira linha , $C = \mathrm{circ}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ou por intermédio da relação $C = (c_{i,j}) = (c_{j-i+1})$, com os sub-índices módulo n.

A matriz circulante $\Pi_n = \mathrm{circ}(0, 1, 0, \ldots, 0)$ é chamada de matriz circulante básica e esta é um caso particular de uma matriz de permutação. Desta forma, dada uma matriz circulante C, segue que

$$\mathrm{circ}(c_1, c_2, \ldots, c_n) = c_1 I + c_2 \Pi + \cdots + c_n \Pi^{n-1} = p(\Pi), \tag{A.1}$$

em que $p(z) = c_1 + c_2 z + \cdots + c_n z^{n-1}$ é chamado de polinômio representante da matriz circulante.

Teorema A.1 *Uma matriz A ordem $n \times n$ é uma matriz circulante de ordem n se e somente se*

$$A\Pi = \Pi A. \tag{A.2}$$

Com base neste resultado tem-se as seguintes propriedades para as matrizes circulantes

Teorema A.2 *Sejam A e B matrizes circulantes de mesma ordem. Então valem as seguintes propriedades:*

(i) *AB é circulante.*

(ii) *A e B comutam.*

(iii) *A^* é circulante.*

A representação matricial de uma convolução cíclica é feita por intermédio de uma matriz circulante. Como exemplo, considere $\{u(k)\}$ e $\{c(k)\}$ duas seqüências N-periódicas. A convolução cíclica entre $\{u(k)\}$ e $\{c(k)\}$

$$w(k) = (u * c)(k) = \sum_{s=0}^{N-1} u(s)c(k-s),$$

tem representação matricial da forma

$$\mathbf{w} = C\mathbf{u},$$

em que $C = \mathrm{circ}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

A.1 Diagonalização

A diagonalização de uma matriz circulante segue da diagonalização da matriz circulante básica Π.

Definição A.2 *Seja n um número inteiro fixo e seja $w = e^{2\pi i/n}$. Define-se a matriz de Fourier de ordem n por*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \cdots & w^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

A matriz de Fourier é uma matriz unitária [17], isto é $FF^* = F^*F = I$ que satisfaz o seguinte Teorema

Teorema A.3 *Se C é uma matriz circulante esta é diagonalizada pela matriz de Fourier F, isto é*

$$C = F^*\Lambda F,$$

em que

$$\Lambda = \Lambda_C = \mathrm{diag}(p(1), p(w), \ldots, p(w^{n-1})).$$

A.2 Matriz Circulante por Blocos

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_m$ matrizes quadradas $n \times n$. Uma matriz circulante por blocos de ordem mn é uma matriz da forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ A_m & A_1 & \cdots & A_{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_2 & A_3 & \cdots & A_1 \end{pmatrix}.$$

A mesma notação é usada, quando estiver claro que os elementos são blocos, isto é

$$A = \operatorname{circ}(A_1, A_2, \ldots, A_m).$$

Muitas das propriedades válidas para as matrizes circulantes também são válidas para as blocos circulantes, com as devidas operações. Define-se a matriz bloco circulante básica $\Pi_{m,n}$ por

$$\Pi_{m,n} = \operatorname{circ}(0, I_n, 0, \ldots, 0),$$

em que I_n é a matriz identidade de ordem n

Teorema A.4 *Uma matriz A é bloco circulante de ordem mn, se e somente se A comuta com a matriz bloco circulante básica $\Pi_{m,n}$, isto é*

$$A\Pi_{m,n} = \Pi_{m,n}A.$$

Para proceder a extensão do Teorema A.3 para as matrizes circulantes por blocos é necessário as seguintes definições em termos de matrizes por blocos [9].

Definição A.3 *Sejam $A_1, A_2, \ldots A_m$ matrizes $n \times n$ A matriz por blocos*

$$\mathcal{V}_n(A_1, \ldots, A_m) = \begin{pmatrix} I & I & \cdots & I \\ A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^{m-1} & A_2^{m-1} & \cdots & A_m^{m-1} \end{pmatrix}$$

é chamada de matriz de Vandermonde por blocos das matrizes A_k.

Definição A.4 *Seja $w = e^{2\pi i/n}$. Define-se a matriz de Fourier por blocos, $F_{m,n}$ por*

$$F_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{m}}\,\mathcal{V}_n(I_n, wI_n, w^2I_n, \ldots, w^{m-1}I_n),$$

em que, I_n denota a matriz identidade de ordem n.

A transposta conjugada $F^*_{m,n}$ é dada por

$$F^*_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{m}}\,\mathcal{V}_n(I_n, \bar{w}I_n, \bar{w}^2 I_n, \ldots, \bar{w}^{m-1} I_n), \tag{A.3}$$

em que vale $F^*_{m,n}F_{m,n} = F_{m,n}F^*_{m,n} = I_{mn}$, ou seja $F_{m,n}$ é uma matriz unitária [9]. Com isto, tem-se os seguintes resultados

Lema A.1 *Seja A uma matriz blocos circulante de ordem mn. Então A pode ser bloco diagonalizada pela matriz $F_{m,n}$. Isto é*

$$A = F^*_{m,n}\mathrm{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m)F_{m,n},$$

em que Λ_s são matrizes $n \times n$.

Teorema A.5 *Seja A uma matriz blocos circulante de ordem mn. Então A^k é uma matriz bloco circulante de ordem mn e satisfaz*

$$A^k = F^*_{m,n}\mathrm{diag}(\Lambda_1^k, \Lambda_2^k, \ldots, \Lambda_m^k)F_{m,n},$$

em que Λ_s são matrizes $n \times n$.

Apêndice B

Autovalores de $\mathcal{K}_a^j$

A matriz do esquema adaptativo (5.21), no domínio de Fourier, é bloco-diagonal, em que cada bloco tem a forma

$$\widehat{\mathcal{K}}_a(\xi,\tau) = \left[\begin{pmatrix} 1 & \frac{\tau}{4}\widetilde{\vartheta}^{(2)}(\xi) \\ \frac{\tau}{4}\widetilde{\chi}_1(\xi) & 1+\frac{\tau}{4}\widetilde{\chi}_2(\xi) \end{pmatrix}^4 + \tau \begin{pmatrix} \widetilde{\beta}^{(2)}(\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

Neste caso, a análise dos autovalores se restringe aos autovalores de cada bloco. Sendo os blocos de dimensão 2×2 pode-se obter uma expressão para cada autovalor, a saber

$$\begin{aligned}
\nu_1 &= 1+\frac{1}{2}\tau\left(\widetilde{\beta}^{(2)}+\widetilde{\chi}_2\right)+\tau^2\frac{1}{512}\left(2\tau^2(\widetilde{\vartheta}^{(2)})^2\widetilde{\chi}_1^2+4\widetilde{\vartheta}^{(2)}\widetilde{\chi}_1\left(48+\tau\widetilde{\chi}_2\left(12+\tau\widetilde{\chi}_2\right)\right)+\widetilde{\chi}_2^2\left(96+\tau\widetilde{\chi}_2\left(16+\tau\widetilde{\chi}_2\right)\right)\right)\\
&\quad -\frac{1}{512}\tau\left[65536(\widetilde{\beta}^{(2)})^2-512\widetilde{\beta}^{(2)}\widetilde{\chi}_2\left(8+\tau\widetilde{\chi}_2\right)\left(32+8\tau\widetilde{\chi}_2+\tau^2\left(2\widetilde{\vartheta}^{(2)}\widetilde{\chi}_1+\widetilde{\chi}_2^2\right)\right)\right.\\
&\quad \left.+\left(8+\tau\widetilde{\chi}_2\right)^2\left(4\widetilde{\vartheta}^{(2)}\widetilde{\chi}_1+\widetilde{\chi}_2^2\right)\left(32+8\tau\widetilde{\chi}_2+\tau^2\left(2\widetilde{\vartheta}^{(2)}\widetilde{\chi}_1+\widetilde{\chi}_2^2\right)\right)^2\right]^{1/2},\\
\nu_2 &= 1+\frac{1}{2}\tau\left(\widetilde{\beta}^{(2)}+\widetilde{\chi}_2\right)+\tau^2\frac{1}{512}\left(2\tau^2(\widetilde{\vartheta}^{(2)})^2\widetilde{\chi}_1^2+4\widetilde{\vartheta}^{(2)}\widetilde{\chi}_1\left(48+\tau\widetilde{\chi}_2\left(12+\tau\widetilde{\chi}_2\right)\right)+\widetilde{\chi}_2^2\left(96+\tau\widetilde{\chi}_2\left(16+\tau\widetilde{\chi}_2\right)\right)\right)\\
&\quad +\frac{1}{512}\tau\left[65536(\widetilde{\beta}^{(2)})^2-512\widetilde{\beta}^{(2)}\widetilde{\chi}_2\left(8+\tau\widetilde{\chi}_2\right)\left(32+8\tau\widetilde{\chi}_2+\tau^2\left(2\widetilde{\vartheta}^{(2)}\widetilde{\chi}_1+\widetilde{\chi}_2^2\right)\right)\right.\\
&\quad \left.+\left(8+\tau\widetilde{\chi}_2\right)^2\left(4\widetilde{\vartheta}^{(2)}\widetilde{\chi}_1+\widetilde{\chi}_2^2\right)\left(32+8\tau\widetilde{\chi}_2+\tau^2\left(2\widetilde{\vartheta}^{(2)}\widetilde{\chi}_1+\widetilde{\chi}_2^2\right)\right)^2\right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Por simplificação de notação, a expressão acima não mostra a dependência que as funções $\widetilde{\vartheta}^{(2)}$, $\widetilde{\beta}^{(2)}$, $\widetilde{\chi}_1$ e $\widetilde{\chi}_2$ têm em relação à variável ξ.

Apêndice C

Métodos Iterativos

Considere o sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, em que $\mathbf{A}$ é uma matriz não singular $n \times n$, e $\mathbf{x}$ e $\mathbf{b}$ são vetores n-dimensionais. Seja $f(x)$ uma função suave. O objetivo é resolver o sistema não linear

$$\mathbf{Ax} + \kappa\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}, \qquad \kappa > 0, \tag{C.1}$$

usando o processo iterativo

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax}^{n+1} + \kappa\mathbf{f}(\mathbf{x}^n) &= \mathbf{b} \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{x}^0 &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Teorema C.1 *Assuma que $\mathbf{f}(x)$ é uma função Lipschitz contínua, isto é, existe uma constante L tal que para todo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

Se $\sigma = \kappa|\mathbf{A}^{-1}|L < 1$, então a equação (C.2) tem uma única solução $\tilde{\mathbf{x}}$ e $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^n = \tilde{\mathbf{x}}$, valendo as estimativas do erro

$$|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^n| \leq \frac{\sigma^n}{1-\sigma}|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0|. \tag{C.3}$$

Prova: Sejam $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ soluções de (C.1), então segue que

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \kappa|\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}))| \leq \kappa|\mathbf{A}^{-1}|\; L\; |\mathbf{x} - \mathbf{y}|,$$

ou seja,

$$(1 - \sigma)|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq 0.$$

Desta forma $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, e segue a unicidade. Subtraindo

$$\mathbf{Ax}^n + \kappa\mathbf{f}(\mathbf{x}^{n-1}) = \mathbf{b}$$

da equação (C.2) segue que

$$\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n = -\kappa \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{n-1})). \tag{C.4}$$

Assim

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}^{n+1} - \mathbf{x}^n| &\leq \sigma |\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n-1}| \\ &\leq \sigma^2 |\mathbf{x}^{n-1} - \mathbf{x}^{n-2}| \\ &\leq \sigma^n |\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0|. \end{aligned} \tag{C.5}$$

Seja $m > n$, então

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^n| &= \left| \sum_{k=n}^{m-1} (\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k) \right| \\ &\leq \left(\sum_{k=n}^{m-1} \sigma^k \right) |\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0| \\ &\leq \frac{\sigma^n}{1-\sigma} |\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0|. \end{aligned} \tag{C.6}$$

Com isto, a seqüência $\mathbf{x}^k$ representa uma seqüência de Cauchy, que converge para um vetor $\tilde{\mathbf{x}}$. O vetor $\tilde{\mathbf{x}}$ é a solução da equação (C.1), pois

$$\lim_{n\to\infty} |\mathbf{f}(\mathbf{x}^n) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})| \leq L \lim_{n\to\infty} |\mathbf{x}^n - \tilde{\mathbf{x}}| = 0.$$

Fixando n e fazendo $m \to \infty$ na equação (C.6) obtém-se a estimativa (C.3). ■

Em certos casos a parte não linear $\kappa \mathbf{f}(\mathbf{x})$ não é Lipschitz contínua. Em vez disso considera-se a seguinte situação

Definição C.1 *A função $f(x)$ é localmente Lipschitz contínua se para todo $\mathbf{x}^0$ e $R > 0$, existe uma constante $L = L(\mathbf{x}^0, R)$ tal que*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \tag{C.7}$$

para $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < R$ e $|\mathbf{y} - \mathbf{x}^0| < R$.

Com esta definição pode-se ter uma nova versão do Teorema C.1, sendo esta

Teorema C.2 *Assuma que $\mathbf{f}(x)$ é uma função localmente Lipschitz continua e seja $L = L(\mathbf{x}^0, 1)$ a constante Lipschitz local para a bola $|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0| < 1$. Se $\sigma = \kappa |\mathbf{A}^{-1}| L < 1$ e $\kappa |\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)|/(1-\sigma) < 1$, então a equação (C.2) tem uma única solução $\tilde{\mathbf{x}}$ com*

$$|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0| \leq \frac{\kappa}{1-\sigma} |\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)| < 1. \tag{C.8}$$

Além disso, $\tilde{\mathbf{x}}$ é localmente única, isto é, não existe outra solução na bola $|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^0| < 1$.

<u>Prova:</u> Da equação de iteração (C.2) segue que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0) = -\kappa \mathbf{f}(\mathbf{x}^0),$$

isto é,

$$|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0| = \kappa |\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)|,$$

e pela hipótese do teorema segue que

$$\frac{1}{1-\sigma}|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0| < 1, \quad \sigma = \kappa |\mathbf{A}^{-1}| L < 1. \tag{C.9}$$

O que será mostrado a seguir é que os elementos da seqüência $\{\mathbf{x}^m\}$, definida pelo processo iterativo (C.2), pertencem à bola $B := |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| \leq 1$. Por intermédio de (C.9) tem-se que $\mathbf{x}^1 \in B$. Suponha que $\mathbf{x}^k \in B$ para $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Por intermédio da equação (C.4), segue que

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{m-1}| &\leq \sigma |\mathbf{x}^{m-1} - \mathbf{x}^{m-2}| \\ &\leq \sigma^2 |\mathbf{x}^{m-2} - \mathbf{x}^{m-3}| \\ &\leq \sigma^{m-1} |\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0|. \end{aligned}$$

Tomando $n = 1$, na equação (C.6) obtém-se

$$|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^1| \leq \frac{\sigma}{1-\sigma}|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0|.$$

Logo,

$$|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^0| \leq |\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^1| + |\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0| \leq \frac{1}{1-\sigma}|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0| < 1,$$

e $\mathbf{x}^m \in B$, o que mostra que os elementos da seqüência $\{x^m\}$ pertencem a B. Portanto as estimativas do Teorema C.1 são válidas, o que prova o teorema. ■

Referências Bibliográficas

[1] Bacry, E., Mallat, S., and Papanicolau, G. A wavelet based space-time adaptive numerical method for partial differential equations. *Math. Modelling Numer. Anal.26*, 7 (1992), 793–834.

[2] B.Gustafsson, Kreiss, H., and Oliger, J. *Time Dependent Problems and Difference Methods*, 1 ed. Wiley Interscience, New York, 1995.

[3] Castilho, J. E., Domingues, M. O., and Gomes, J. S. M. Estimation of truncation error on discretization of nonlinear differential operators using biorthogonal wavelets. Preprint-1997.

[4] Castilho, J. E., and Gomes, S. M. Discretization of nonlinear terms using biorthogonal wavelets: Hybrid Formulations. In *Approximation Theory IX: Computational Aspects* (Nashville, TN, 1998), vol. 2, C. K. Chui and L. L. Schumaker, pp. 9–16.

[5] Castilho, J. E., and Gomes, S. M. Esquemas de aproximação em multirresolução. In *ERMAC 2001* (Ubêrlandia, 2001).

[6] Charton., P., and Perrier, V. A pseudo-wavelet scheme for the two-dimensional Navier-Stokes equation. *Mat. Aplic. Comp.15* (1996), 24–35.

[7] Chui, C. K. *An Introduction to Wavelets*, vol. 1 of *Wavelet Analysis and Its Applications.* Academic Press, New York, 1995.

[8] Chui, C. K., and Wang, J. Z. A cardinal spline approach to wavelets. *Proc. Amer. Math. Soc.113* (1991), 785–793.

[9] Claeyssen, J. C. R., and Leal, L. A. S. Diagonalization and spectral decomposition of factor block circulant matrices. *Linear Algebra Appl.99* (1988), 41–61.

[10] Cohen, A. Wavelets methods in Numerical Analysis. In *Handbook of Numerical Analysis* (To appear), Ph. Ciarlet and J. L. Lions.

[11] Cohen, A., and Daubechies, I. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms. *Appl. Comput. Harmonic Anal.1* (1993), 54–81.

[12] Cohen, A., Daubechies, I., and Feauveau, J. C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure . Appl. Math.45* (1992), 485–560.

[13] Cullen, M. J. P., and Morton, K. W. Analysis of evolutionary error in finite element and other methods. *J. Comput. Phys.34* (1980), 245–267.

[14] Dahmen, W., Goodman, T., and Micchelli, C. A. Compactly supported fundamental functions for splines interpolation. *Numer. Math.52* (1988), 639–664.

[15] Dahmen, W., Kunoth, A., and Urban, K. Biorthogonal spline-wavelets on de interval- Stability and moment conditions. IGPM report 129, RWTH Aachen., 1996.

[16] Daubechies, I. *Ten Lectures on Wavelets*, vol. 61 of *CBMS Lecture Notes.* SIAM, Philadelphia, 1992.

[17] Davis, P. J. *Circulant Matrices.* Pure & Applied Mathematics. Wiley Interscience, New York, 1979.

[18] Deslauries, G., and S.Dubuc. Symmetric iterative interpolation processes. *Constr. Approx.5* (1989), 49–68.

[19] Donoho, D. L. Interpolating wavelet transforms. Tech. rep., Stanford University., 1992.

[20] Fröhlich., J., and Schneider, K. An adaptive wavelet-vaguelette algorithm for the solution of nonlinear PDEs. *J. Comput. Phys.130* (1997), 174–190.

[21] Gomes, S. M. Convergence rates in the Sobolev H^s-norm of approximations by discrete convolutions. Preprint-1990.

[22] Gomes, S. M. Convergence estimates for the Wavelet-Galerkin method: superconvergence at the node points. *Advances in Comp. Math.4* (1995), 261–282.

[23] Gomes, S. M., and Cunha, C. The relation between Petrov-Galerkin and collocation methods using spline multiresolution analyses. *Revista de la Unión Matemática Argentina 41*, 1 (1998), 61–78.

[24] Harten, A. Multiresolution representation of data: A general framework. *SIAM J. Numer. Anal.33* (1996), 1205–1256.

[25] Katznelson, Y. *An introduction to Harmonic Analysis*, 2 ed. Dover Publications,inc, New York, 1976.

[26] Lemarié, P. G. Ondelettes à localisation exponentielle. *J. Math. Pures Appl.67* (1988), 227–236.

[27] Liandrat, J., and Tchamitchian, P. On the fast approximation of some non linear operators in non regular wavelet bases. *Adv. Comput. Math.8* (1998), 179–192.

[28] Mallat, S. G. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $\mathbf{L}^2(\mathbb{R})$. *Trans. Amer. Math. Soc.315*, 1 (1989), 69–87.

[29] Masson, R. Biorthogonal splines wavelets on the interval for resolution of boundary problems. *M3As 6* (1996), 749–791.

[30] Meyer, Y. Ondelettes sur l'intervalle. *Rev. Mat. Iberoamericana 7* (1992), 115–133.

[31] Meyer, Y. *Wavelets and Operators*, vol. 37 of *CSAM*. University Press, Cambridge, 1992.

[32] Richtmyer, R. D., and Morton, K. W. *Difference Methods for Initial-Value Problems*, 2 ed., vol. 4 of *Interscience tracts in pure and applied mathematics*. Wiley Interscience, New York, 1967.

[33] Schoenberg, I. J. Cardinal interpolation and spline functions. *J. Approx. Theory2* (1969), 167–206.

[34] Strang, G., and Fix, G. *An Analysis of the Finite Element Method*. Wellesley-Cambridge press, Cambridge, 1973.

[35] Ware, A. Discrete projections onto wavelet subspaces. Tech. Rep. 97/04, Durham University., 1997.