Teorema de Poincaré-Hopf

Ricardo M. Martins

11 de abril de 2017

Resumo

Estas notas tem como objetivo apresentar as ideias da demonstração do Teorema de Poincaré-Hopf para superfícies de gênero g. Nos baseamos em [1] e [2], com notas históricas baseadas em [3] e [4].

1 Teorema de Euler

Vamos começar estas notas com um daqueles teoremas conhecidos "desde a 5a série":

Theorem 1.1 (Euler, 1758)**.** *Se P é um poliedro com V vértices, A arestas e F faces então $V - A + F = 2$.*

Este teorema decorre de um resultado de Descartes de 1639, fato este que foi percebido por Leibniz em 1675 mas que só veio a público em 1860 - Descartes morreu em Estocolmo e os baú com seus cadernos estava sendo levado para a França quando naufragou no rio Sena; o baú no entanto foi encontrado no dia seguinte (Leibniz teve acesso ao material e concluiu a prova). Esta história está relatada em [4].

Em todo caso, o teorema é obviamente falso. A hipótese de que P seja convexo o torna verdadeiro, mas ainda assim existem poliedros não-convexos que satisfazem o teorema.

Finalmente, em 1893, Poincaré percebeu que o número $V - A + F$ é de fato um invariante topológico. Poincaré mostrou que se dois poliedros (V, A, F) e (V', A', F') são homeomorfos, então $V - A + F = V' - A' + F'$. Se P é um poliedro, definimos $\chi(P) = V - A + F$ como sendo a característica de Euler-Poincaré de P. Algo menos geral vale: se dois poliedros são homotópicos então eles tem a mesma característica de Euler-Poincaré.

Observe que se P é um tetraedro então $\chi(P) = 2$; logo, qualquer poliedro homeomorfo ao tetraedro tem característica de Euler igual a 2 e isto é verdade, por exemplo, para poliedros convexos.

Nem todo poliedro é convexo (ou homeomorfo à esfera): veja por exemplo o "toro quadrado"que tem característica 0:

Nas próximas seções, ampliaremos a definição de característica para variedades. Observe que este resultado é do tipo global: ele é sobre toda a variedade. Nenhum comportamento "local"da variedade interessa no cálculo da característica.

Veremos, no entanto, que a característica depende totalmente de alguns números associados a singularidades de campos vetoriais. Este é o conteúdo do Teorema de Poincaré-Hopf.

2 Característica de Euler

Seja Q um quadrado. Para calcular/definir $\chi(Q)$, vamos aprender a particionar um quadrado em triângulos. A regra é que os triângulos devem ser disjuntos e sua união resultar no quadrado.

Perceba que em qualquer triangulação, se f é o número de faces de triângulos, e é o número de arestas e v o número de vértices, então $f - e + v = 1$.

A partição de uma figura S qualquer em triângulos que obedecem à regra anterior é chamada de triangulação da figura. O número $\chi(S) = f - e - v$ é chamado característica de Euler-Poincaré de S.

Não iremos demonstrar o teorema abaixo nestas notas, mas ele é verdadeiro:

Theorem 2.1. *$\chi(S)$ não depende da triangulação escolhida.*

Corollary. *Se P é um polígono qualquer então $\chi(P) = 1$.*

Note que se começarmos com um quadrado e usarmos alguma relação de equivalência para construir uma superfície S, poderemos ainda calcular $\chi(S)$ da mesma forma. Isto implica no seguinte:

Corollary. *$\chi(S^2) = 2$, $\chi(\mathbb{T}) = 0$.*

Demonstração. A prova pode ser feita facilmente dividindo o quadrado em 8 triângulos e aplicando as relações de equivalência. $\square$

Diremos que uma superfície S é fechada se ela não tem fronteira ($\partial S = \varnothing$). Dizemos que o gênero de uma superfície fechada S é g se g o número máximo de cortes ao longo de curvas fechadas simples que não se interceptam que podem ser feitos sem tornar a superfície resultante desconexa. Uma superfície de gênero g será denotada por S_g. Note que S_g uma superfície fechada com g buracos. Assim, S_0 é a esfera, S_1 é o toro e S_g é um "toro com g buracos".

S_g pode ser construída como quociente de um polígono de $4g$ lados, identificando adequadamente os lados.

Proposition 2.2. *$\chi(S_g) = 2 - 2g$.*

Pra variar, não iremos demonstrar esta proposição para qualquer g. A prova para $g = 0, 1$ é trivial e para $g = 2$ não é tão difícil.

3 Índice de um ponto crítico

Sejam M, N superfícies compactas orientadas e seja $f : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Seja $p \in M$ um ponto regular para f, ou seja, $Df(p)$ é isomorfismo entre T_pM e $T_{f(p)}N$. A matriz $Df(p)$ pode ou não preservar orientação: se $\det(Df(p)) > 0$ preserva, caso contrário reverte orientação. Se $q \in N$ é um valor regular, definimos o grau de f em q por

$$\deg\ (f, q) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{sgn}\ \det(Df(p)).$$

Example 3.1. *Se f é constante, o grau é zero.*

Example 3.2. *Se $f = Id$, o grau é um.*

Example 3.3. *Se $f : S^1 \to S^1$ é dada por $f(z) = z^n$ então o grau é n.*

Um resultado importante é o seguinte: se N é conexa então o grau não depende do ponto, logo podemos definir $\deg f$.

Seja X um campo vetorial com uma singularidade isolada em x_0. Seja $\varepsilon > 0$ tal que não existem outras singularidades distando menos que ε de x_0. Seja S_ε^{n-1} a esfera centrada em x_0 e de raio ε. Considere a função $G : S_\varepsilon^{n-1} \to S^{n-1}$ dada por $G(x) = X(x)/||X(x)||$.

Definimos o índice de X em x_0 $\mathrm{ind}_{x_0}(X)$, é definido como sendo o grau de G.

Em dimensão 2, existe uma forma geométrica de pensar o índice: imagine um círculo em torno de p e que você está percorrendo este círculo no sentido anti-horário. O índice é o número de voltas que o campo vetorial dá enquanto você percorre o círculo.

É fácil provar que o índice é invariante por difeomorfismos, logo se X e Y são campos próximos (na topologia C^r), eles tem o mesmo índice.

4 Teorema de Poincaré-Hopf

Theorem 4.1. *Se M é uma superfície compacta e orientada e X é um campo vetorial com singularidades $p_1, \ldots, p_k$, todas isoladas, então*

$$\chi(M) = \sum \mathrm{ind}_{p_i}(X).$$

Remark 4.2. *O teorema anterior diz que todo campo vetorial sobre a esfera precisa ter pelo menos uma singularidade. É por isto que sempre existe pelo menos um ponto na Terra onde não há vento, e também é por isto que nosso cabelo está sempre arrepiado.*

Remark 4.3. *Note que o TPH nos permite calcular $\chi(M)$ para variedades quaisquer. Em particular, se a dimensão de M é ímpar então $\chi(M) = 0$. De fato, seja X um campo vetorial em M com $p_1, \ldots, p_r$ singularidades isoladas. Ora, $-X$ é um campo em M com as mesmas singularidades, logo*

$$\sum \mathrm{ind}_{p_i}(X) = \sum \mathrm{ind}_{p_i}(-X).$$

Por outro lado, $\mathrm{ind}_{p_i}(-X) = -\mathrm{ind}_{p_i}(X)$ - para ver isto, basta lembrar que a dimensão é ímpar e estamos calculando o sinal do determinante da matriz. Logo

$$\sum \mathrm{ind}_{p_i}(X) = -\sum \mathrm{ind}_{p_i}(X)$$

e daí $\chi(M) = \sum \mathrm{ind}_{p_i}(X) = 0$.

Remark 4.4. *Seja M uma superfície em $\mathbb{R}^3$ e considere uma triangulação em M. Considere um campo vetorial em M que tenha exatamente $V + A + F$ singularidades, colocando uma singularidade no centro de cada destes elementos. Suponha que as singularidades são construídas de modo que existam conexões entre os elementos seguindo a regra: a trajetória sai da singularidade do elemento de dimensão menor para o maior. Note que as singularidades dos vértices são pontos repulsores, as das faces pontos atratores e as das arestas pontos de sela. Portanto a soma dos índices das singularidades resulta em $V - A + F$, que é a fórmula original de Euler para $\chi(M)$.*

5 Prova de TPH no caso $M = S_g$

No caso de $M = S_g$, já sabemos que $\chi(M) = 2 - 2g$. Precisamos mostrar que a soma dos índices de um campo vetorial definido em S_g é exatamente $2 - 2g$.

Seja X um campo vetorial em S_g com pontos críticos $p_1, \ldots, p_s$. Seja C um círculo contendo todos os pontos críticos. Note que este círculo pode ser construído começando com um pequeno círculo em torno de cada ponto, que podem ser deformados até se unirem em um ponto em comum e daí "aberto"para se formar só um círculo.

Já vimos que existe um campo que "realiza"o $2 - 2g$, construído colocando singularidades em faces, arestas e vértices de S_g. Note que em S_g é possível construir ainda outro campo vetorial Y que realiza a característica. A construção será feita imitando como é o escoamento de um líquido em S_g e produz os pontos críticos $q_1, \ldots, q_{2+2g}$.

Precisamos mostrar que $\sum \operatorname{ind}_{p_i}(X) = \sum \operatorname{ind}_{p_i}(Y)$. Isto terminará a prova do teorema.

Vamos supor que $q_1, \ldots, q_{2-2g}$ também estão dentro do círculo C. Isto pode ser feito modificando um pouco o campo vetorial Y.

Remark 5.1. *Lembre-se que definimos o índice de Z em z_0 $\operatorname{ind}_{z_0}(Z)$ como o grau de uma certa aplicação G_Z em $B(z_0, \varepsilon)$. Assim, se $z_1, \ldots, z_r$ são singularidades que estão dentro de um círculo C, o índice de Z em C pode ser definido como o grau de G_Z definida em C (para fazer isto, use o truque de unir os vários "círculos locais"num único círculo, como fizemos antes). Em particular, a mesma interpretação geométrica do "número de voltas"ainda faz sentido neste caso, considerando que o círculo a ser percorrido é C.*

Vamos estudar como X e Y se comportam em $\tilde{S} = S_g \setminus \operatorname{int}(C)$ (não existem singularidades de X ou Y neste conjunto).

Se $p \in \tilde{S}$, seja $\theta(p)$ o ângulo entre $X(p)$ e $Y(p)$. Note que $X(p) \neq 0$ e $Y(p) \neq 0$ em todo $p \in \tilde{S}$. A função θ é uma aplicação contínua $\theta : \tilde{S} \to S^1$.

Considere fatias de $\tilde{S}_g$.

Note que $\theta(P_0)$ deve ser próximo de $\theta(P)$ com $P \in C_1$, graças à continuidade de θ, portanto o grau de θ é 0 em C_1 (não acontece uma volta completa).

Quando aproximamos de C_2, ainda temos grau 0. Quando chegamos a C_2, precisamos considerar a parte de cima e a parte de baixo. O grau da soma é a soma dos graus, e esta soma precisa dar zero por continuidade. Seguimos assim para sempre, até obter que o grau de θ em C é zero, ou seja: a diferença entre o número de voltas que X e Y completam em X é zero. Logo, eles dão o mesmo número de voltar em C. Mas isto é exatamente dizer que eles tem o mesmo grau. Logo $\sum \operatorname{ind}_{p_i}(X) = \sum \operatorname{ind}_{p_i}(Y)$ e a demonstração está completa.

Referências

[1] Fernando Manfio, *Introdução à Topologia Diferencial*, Notas de aula, ICMC-USP.

[2] K. Ueno, K. Shiga, S. Morita, *A Mathematical Gift, I: the interplay between topology, functions, geometry and algebra.* Mathematical World, AMS, 2003.

[3] E. L. Lima, *A característica de Euler-Poincaré*, Revista Matemática Universitária **1**, SBM, 1985.

[4] E. L. Lima, *O Teorema de Euler sobre poliedros*, Revista Matemática Universitária **2**, SBM, 1985.