Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Seminários sobre Sistemas Dinâmicos

Teorema de Hartman-Grobman

Matheus Manzatto de Castro

CAMPINAS
2017

1 Definições

Definição 1. *Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz e $\varphi(t, x_0)$ a solução maximal do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

definimos o fluxo de f como sendo a função $\Phi : D \to \mathbb{R}^n$, tal que, $\Phi(t, x) = \varphi(t, x)$, onde D é o domínio de definição da equação.

Definição 2. *Sejam $\Phi : D_1 \to \mathbb{R}^n$ e $\Psi : D_2 \to \mathbb{R}^n$ os fluxos gerados pelos campos $F : \Delta_1 \to \mathbb{R}^n$ e $G : \Delta_2 \to \mathbb{R}^n$, respectivamente. Diz-se que F é topologicamente conjugado a G quando existe um homeomorfismo $h : \Delta_1 \to \Delta_2$ tal que $h(\Phi(t, x)) = \Psi(t, h(x))$ para todo $(t, x) \in D_1$.*

Neste caso, tem-se necessariamente que $I_1(x) = I_2(h(x))$, onde $I_1(x)$ e $I_2(h(x))$ denotam os intervalos máximos das respectivas soluções maximais. O homeomorfismo h chama-se conjugação topológica entre F e G.

Definição 3. *Seja $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um isomorfismo. L é dito hiperbólico se o espaço $\mathbb{R}^n$ possui uma decomposição em soma direta $\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s$ tal que:*

- *Ambos E^u e E^s são invariantes por L;*
- *A restrição $L_u = L|_{E^u}$ é uma expansão, enquanto $L_s = L|_{E^s}$ é uma contração; isto é, $\|L_u^{-1}\| < 1$ e $\|L_s\| < 1$*

É fácil mostrar que, se o espectro de L não toca o círculo unitário então L é um isomorfismo hiperbólico.

Definição 4. *O ponto p é chamado de ponto singular de um campo vetorial X se $X(p) = 0$.*

Definição 5. *Um ponto singular p de um campo vetorial X de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, chama-se hiperbólico se todos os autovalores de $DX(p)$ têm parte real diferente de zero.*

Por todo o texto serão utilizadas as seguintes notações:

$$a = \max\{\|L_u^{-1}\|, \|L_s\|\} < 1$$

$$\mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n) = \{\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;\ \phi \text{ é uniformemente contínua e limitada em todo } \mathbb{R}^n\}$$

$$\mathcal{L}_\mu(L) = \{\Lambda = L + \lambda\ ;\ \lambda \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n) \text{ é } \mu\text{-Lipschitz, limitada por } \mu\ \}$$

$$\mathcal{H} = \{h = I + g\ ;\ g \in \mathcal{C}_{BU}\},$$

onde $\mu \in \mathbb{R}_+$ e I é a aplicação identidade de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^n$. Munindo $\mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$ com a norma do supremo

$$\|\phi\| = \sup\{\|\phi(x)\|; x \in \mathbb{R}^n\},$$

este espaço se torna um espaço de Banach, o que faz $\mathcal{L}_\mu(L)$ e $\mathcal{H}$ se tornarem espaços métricos completos.

2 Resultados conhecidos

Teorema 1. *Se $\mu > 0$ é suficientemente pequeno então cada $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu(L)$ é um Lipeomorfismo, isto é, um homeomorfismo Lipschitz com inversa Lipschitz.*

Teorema 2. *Sejam P um espaço topológico, Y um espaço métrico completo e $F : P \times Y \to Y$ uma aplicação contínua. Suponhamos que cada $F_p := F(p, \cdot) : Y \to Y$ é uma contração com constante de contração k_p limitada por $b < 1$. Então para cada $p \in P$, a aplicação F_p tem único ponto fixo e esse ponto fixo depende continuamente de p.*

Teorema 3. *(Lema de Gronwall) Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta(t) \geq 0$ e $\phi(t)$ são funções reais contínuas que satisfazem*

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)\phi(s)ds, \text{ para } a \leq t \leq b$$

então

$$\phi(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s)ds}, \text{ para } a \leq t \leq b.$$

Teorema 4. *Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear. Então se $\phi(t)$ é solução da equação diferencial,*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

é satisfeita a seguinte relação: $\phi(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} f(\phi(s))dt$.

3 Teorema de Hartman-Grobman

Lema 1. *Seja $U \subset \mathbb{R}^d$ aberto, tal que $0 \in U$. Dados $F : U \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathbb{C}^1$ tal que $DF(0) = L$ e $\varepsilon > 0$, então existem $r_1 > r_2 > 0$ e $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ tais que:*

1. *$G = F$ em $B_{r_2}(0)$.*
2. *$G = L$ fora de $B_{r_1}(0)$.*
3. *A função $\Psi = G - L$ é limitada por ε.*
4. *Ψ é ε-Lipschitz.*
5. *Ψ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Escolhemos uma função $\alpha : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ satisfazendo:

1. $\alpha(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.
2. $\alpha(x) = 1, \forall\, x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
3. $\alpha(x)$ é monótona crescente em $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ e $\alpha(x)$ é monótona descrescente de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Note que, como α é uma função de suporte compacto de classe $\mathcal{C}^\infty$, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $M = \sup\{|D\alpha(x)|;\ x \in \mathbb{R}\}$.

Definimos $\phi : U \to \mathbb{R}^d$ tal que $\phi(x) = F(x) - Lx$. Observe que ϕ é de classe $\mathcal{C}^1$ e além disso, $D\phi(0) = 0$. Sendo assim, dado $\widetilde{\varepsilon} = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2M}, \frac{\varepsilon}{2}\right\} > 0$ existe $1 \geq r > 0$ tal que

$$x \in B_r(0) \subset U \Rightarrow \|D\phi(x)\| < \widetilde{\varepsilon}$$

implicando pela desigualdade do valor médio que, para todo $x \in B_r(0) \Rightarrow \|\phi(x)\| < \widetilde{\varepsilon}\|x\|$.

Considere agora $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ definida por:

$$G(x) = \begin{cases} Lx + \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\phi(x), \text{ se } x \in U \\ Lx, \text{ se } x \in \mathbb{R}^n \setminus U \end{cases}$$

Dessa forma, tomemos $r_1 = r$ e $r_2 = \frac{r}{2}$. Verificaremos que as condições são satisfeitas:

1) Se $x \in B_{r_2}(0)$, temos que $\alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) = 1$, implicando que $G(x) = Lx + \phi(x) = F(x)$.

2) Se $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{r_1}(0)$, conseguimos que $\alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) = 0$ e consequentemente $G(x) = Lx + 0\phi(x) = Lx$

3) Note que $\Psi(x) = G(x) - Lx = \begin{cases} \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\phi(x), \text{ se } x \in \overline{B_{r_2}(0)} \\ 0, \text{ se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{r_2}(0)} \end{cases}$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|\Psi(x)\| &\leq \sup_{x\in\overline{B_{r_1}(0)}} \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\|\phi(x)\| \\ &\leq \sup_{x\in\overline{B_{r_1}(0)}} \|\phi(x)\| \\ &\leq \widetilde{\varepsilon} r_1 \\ &\leq \ \varepsilon \end{aligned}$$

4) A fim de mostrar que Ψ é ε-Lipschitz vamos calcular a diferença $\|\Psi(x) - \Psi(y)\|$ separaremos em 3 casos diferentes.

Considere inicialmente que $x, y \in B_{r_2}(0)$, sendo assim

$$\begin{aligned} \|\Psi(x) - \Psi(y)\| &= \left\|\alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\phi(x) - \alpha\left(\frac{\|y\|}{r}\right)\phi(y)\right\| \\ &= \left\|\alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\phi(x) - \alpha\left(\frac{\|y\|}{r}\right)\phi(x) + \alpha\left(\frac{\|y\|}{r}\right)\phi(x) - \alpha\left(\frac{\|y\|}{r}\right)\phi(y)\right\| \\ &\leq \left\|\alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right) - \alpha\left(\frac{\|y\|}{r}\right)\right\| \|\phi(x)\| + \left\|\alpha\left(\frac{\|y\|}{r}\right)\right\| \|\phi(x) - \phi(y)\| \\ &\leq \frac{1}{r}\sup_{z\in\mathbb{R}} \|D\alpha(z)\|\|x-y\| \sup_{x\in B_{r_1}(0)} \|\phi(x)\| + 1 \sup_{z\in B_{r_2}(0)} \|D\phi(z)\|\|x-y\| \\ &\leq \frac{1}{r} M\widetilde{\varepsilon} r\|x-y\| + \widetilde{\varepsilon}\|x-y\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}\|x-y\| + \frac{\varepsilon}{2}\|x-y| \\ &\leq \varepsilon\|x-y\| \end{aligned}$$

Suponha agora que $x \in B_{r_1}(0)$ e $y \notin B_{r_1}(0)$, considere a reta $x + t(x - y)$, $t \in [0,1]$, sabemos pelo teorema da alfândega que existe $t_0 \in (0,1]$ tal que $z_0 = x + t_0(y - x)$ $\in \partial B_{r_2}(0)$. Tome a sequência$(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $t_n = t_0 - \frac{t_0}{2n}$.

$$\begin{aligned}
\|\Psi(x) - \Psi(y)\| &= \|\Psi(x) - \Psi(z_0)\| \\
&= \|\Psi(x) - \Psi(\lim_{n\to\infty} x + t_n(y - x))\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|\Psi(x) - \Psi(x + t_n(y - x))\| \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \varepsilon\|x - x + t_n(y - x)\| \\
&\leq (\lim_{n\to\infty} t_n)\varepsilon\|(y - x)\| \\
&\leq t_0\varepsilon\|y - x\| \\
&\leq \varepsilon\|x - y\|
\end{aligned}$$

Finalmente para o caso $x, y \notin B_{r_1}(0)$ a desigualdade é óbvia pois $\|\Psi(x)\| = \|\Psi(y)\| = 0 \Rightarrow \|\Psi(x) - \Psi(y)\| \leq \varepsilon\|x - y\|$

5) A prova dessa proposição é imediata pois Ψ é uma função contínua de suporte compacto, logo Ψ é uniformemente contínua.

Uma vez que 1), 2), 3), 4) e 5) foram verificados o lema fica demonstrado. ∎

Lema 2. *Seja L: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma isometria hiperbólica, se $\mu > 0$ é suficientemente pequeno, então para cada $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu(L)$ existe um único $h = h_\Lambda \in \mathcal{H}$ tal que $h\Lambda = Lh$. Além do mais, este h_Λ é um homeomorfismo que depende continuamente de $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu(L)$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1 sabemos que podemos tomar $\delta > 0$ suficientemente pequeno de forma que cada $\Lambda \in \mathcal{L}_\delta$ seja um Lipomorfismo. Sendo assim, tomemos $\mu = \min\left\{\delta, \frac{1-a}{2}\right\}$.

Para demonstrar o teorema provaremos algo mais forte; será mostrado que para cada par Λ, $\Lambda' \in \mathcal{L}_\mu(L)$ exite um único $h \in \mathcal{H}$ tal que $h\Lambda = \Lambda' h$. Ainda mais, h é um homeomorfismo que depende continuamente de $(\Lambda, \Lambda') \in \mathcal{L}_\mu(L) \times \mathcal{L}_\mu(L)$. A fim de não deixar a notação carregada, denotaremos a composição de funções pelo produto, isto é, $g(f) = gf$

Note que a equação $h\Lambda = \Lambda' h$, para $h \in \mathcal{H}$ e Λ, $\Lambda' \in \mathcal{L}_\mu(L)$ é

$$(I + g)(L + \lambda) = (L + \lambda')(I + g)$$

sendo $g \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$. Podemos ainda reescrever a equação acima como:

$$g\Lambda - Lg = \lambda'(I + g) - \lambda \tag{1}$$

Ou seja, (1) é equivalente a $g = [Lg + \lambda'(I + g) - \lambda]\Lambda^{-1}$. Uma vez que L é uma isometria hiperbólica, pode-se decompor $\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s = E^u \times E^s$, e compondo a função g com as projeções $\pi_u : \mathbb{R}^n \to E^u$ e $\pi_s : \mathbb{R}^n \to: E^s$ conseguimos as seguintes relações:

$$g_u = [L_u g_u + \lambda'(I + g) - \lambda_u]\Lambda^{-1} \tag{2}$$

$$g_s = [L_s g_s + \lambda'(I + g) - \lambda_s]\Lambda^{-1} \tag{3}$$

Da mesma forma, (1) também é equivalente a $g = L^{-1}[g\Lambda + \lambda - \lambda'(I+g)]$ a qual compondo com as projeções obtendo-se:

$$g_u = L_u^{-1}[g_u\Lambda + \lambda_u - \lambda_u'(I+g)] \tag{4}$$

$$g_s = L_s^{-1}[g_s\Lambda + \lambda_s - \lambda_s'(I+g)] \tag{5}$$

Observe que as equações (3) e (4) possuem os termos L_s e L_u^{-1}, que definem uma contração, sendo assim podemos construir o operador $K := K_{\Lambda,\Lambda'}$:

$$K : \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$$
$$g = (g_u, g_s) \mapsto (L_u^{-1}[g_u\Lambda + \lambda_u - \lambda_u'(I+g)], [L_s g_s + \lambda'(I+g) - \lambda_s]\Lambda^{-1})$$

Precisamos verificar se K está bem definida, ou seja, se $K(\mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)) \subset \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$.

De fato, dada $f \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$, vemos claramente que $K(f)$ é uniformemente contínua pois suas entradas são escritas como composição de funções uniformemente contínuas, sendo assim basta verificar se $K(f)$ é limitada, para isso analisaremos as projeções de $K(f)$ em E^s e E^u separadamente.

$$K(f) = (L_u^{-1}[f_u\Lambda + \lambda_u - \lambda_u'(I+f)], [L_s f_s + \lambda_s'(I+f) - \lambda_s]\Lambda^{-1})$$

Para a projeção de $K(f)$ em E^u temos que:

$$\begin{aligned}
\|K(f)_u(x)\| &= \|L_u^{-1}[f_u\Lambda + \lambda_u - \lambda_u'(I+f)](x)\| \\
&\leq \|L_u^{-1}\| \left(\|[f_u\Lambda(x)\| + \|\lambda_u(x)\| + \|\lambda_u'(I+f)](x)\|\right) \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f(x)\| + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|\lambda(x)\| + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|\lambda'(x)\|
\end{aligned}$$

Uma vez que f, λ e λ' são funções limitadas, encontramos uma cota superior para $K(f)_u(x)$, implicando que tal função é limitada. Por outro lado temos que

$$\begin{aligned}
\|K(f)_s(x)\| &= \|[L_s f_s + \lambda'(I+f) - \lambda_s]\Lambda^{-1}(x)\| \\
&\leq \|L_s f_s\left(\Lambda^{-1}(x)\right)\| + \|\lambda'((I+f)(\Lambda^{-1}(x)))\| + \|\lambda_s(\Lambda^{-1}(x))\| \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|f(x)\| + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|\lambda'(x)\| + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|\lambda(x)\|
\end{aligned}$$

Utilizando o argumento anterior concluímos que $K(f)_s$ é função limitada. Sendo assim deduzimos que $K(f)$ é limitada, logo $K(f) \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$. Mostraremos agora que a função K é uma contração. Tome $\phi, \psi \in \mathcal{C}_{BU}(\mathbb{R}^n)$, note que

$$\begin{aligned}
\|K(\phi)_u - K(\psi)_u\| &= \|L_u^{-1}[\phi_u\Lambda + \lambda_u - \lambda_u'(I+\phi)] - L_u^{-1}[\psi_u\Lambda + \lambda_u - \lambda_u'(I+\psi)]\| \\
&\leq \|L_u^{-1}[(\phi_u - \psi_u)\Lambda + \lambda_u'(I+\phi) - \lambda_u'(I+\psi)]\| \\
&\leq \|L_u^{-1}\| \left[\|\phi - \psi\| + \mu\|\phi - \psi\|\right] \\
&\leq (a + a\mu)\|\phi - \psi\| \\
&\leq (a + \mu)\|\phi - \psi\| \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2}\right)\|\phi - \psi\|
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|K(\phi)_s - K(\psi)_s\| &= \|[L_s\phi_s + \lambda'(I+\phi) - \lambda_s]\Lambda^{-1} - [L_s\psi_s + \lambda'(I+\psi) - \lambda_s]\Lambda^{-1}\| \\
&\leq \|L_s(\psi - \phi)(\Lambda^{-1})\| + \|\lambda'(I+\phi)(\Lambda^{-1}) - \lambda'(I+\psi)(\Lambda^{-1})\| \\
&\leq \|L_s\|\|\phi - \psi\| + \mu\|\phi - \psi\| \\
&\leq (a+\mu)\|\phi - \psi\| \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2}\right)\|\phi - \psi\|
\end{aligned}$$

Dessa forma concluímos que a aplicação $K_{\Lambda,\Lambda'}$ é uma contração, e aplicando o Teorema 2 temos que para cada Λ, Λ' existe um único ponto fixo $g = g_{\Lambda,\Lambda'}$ que depende continuamente de $(\Lambda, \Lambda') \in \mathcal{L}_\mu(L) \times \mathcal{L}_\mu(L)$. Sendo assim:

$$\begin{aligned}
g &= K(g) \\
(g_u, g_s) &= (L_u^{-1}[g_u\Lambda + \lambda_u - \lambda'_u(I+g)], [L_s g_s + \lambda'(I+g) - \lambda_s]\Lambda^{-1})
\end{aligned}$$

uma vez que (1) é equivalente à ocorrência simultânea (3) e (4) obtemos que:

$$\begin{aligned}
&g\lambda - Lg = \lambda'(I+g) - \lambda \\
\Rightarrow &(I+g)(L+\lambda) = (L+\lambda')(I+g) \\
\Rightarrow &(I+g)\Lambda = \Lambda'(I+g)
\end{aligned}$$

Tomando $h = h_{\Lambda,\Lambda'} = I + g_{\Lambda,\Lambda'}$ conseguimos que h é uma função contínua que satisfaz $h\Lambda = \Lambda' h$. Mostremos agora que a inversa de $h_{\Lambda,\Lambda'}$ é $h_{\Lambda',\Lambda}$. Basta notar que

$$h_{\Lambda,\Lambda'}h_{\Lambda',\Lambda}\Lambda' = h_{\Lambda,\Lambda'}\Lambda h_{\Lambda',\Lambda} = \Lambda' h_{\Lambda,\Lambda'}h_{\Lambda',\Lambda}$$

sendo assim $h_{\Lambda,\Lambda'}h_{\Lambda',\Lambda}$ conjuga Λ' com a própria Λ' , mas note que a função identidade também faz essa conjugação, então pela unicidade temos que $h_{\Lambda,\Lambda'}h_{\Lambda',\Lambda} = I$, e repetindo o mesmo argumento para o lado oposto concluímos que $h_{\Lambda',\Lambda}h_{\Lambda,\Lambda'} = I$.

Para demonstrar o lema basta tomar $\Lambda' = L$, sendo assim conseguimos o homeomorfismo $h = h_\Lambda$ que satisfaz $h_\Lambda\Lambda = Lh_\Lambda$ e depende continuamente de Λ. ■

Lema 3. *Se $\Lambda = L + \lambda$ é considerado como um campo vetorial em $\mathbb{R}^n$, e^L é isomorfismo hiperbólico com respeito a $\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^s$ e $\nu > 0$ é suficientemente pequeno, então para cada $\Lambda_\nu(L)$ existe um único $H = H_\Lambda \in \mathcal{H}$ tal que $H\phi_\Lambda(t,x) = e^{Lt}H(x)$ para $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, onde $\phi_\Lambda(x)$ é o fluxo de Λ e H_λ é um homeomorfismo dependendo continuamente de $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu$.*

Demonstração. Dado o isomorfismo hiperbólico e^L, o Lema 2 nos garante a existência de $\mu > 0$ tal que para cada $\Lambda \in \mathcal{L}_\mu(e^L)$ existe um único $h = h_\Lambda \in H$ tal que $h\Lambda = L\Lambda$, sendo assim, tomemos $\nu = \min\left\{\frac{\mu}{\|e^L\|^2 e^{\|e^L\|}}, 1\right\}$.

Seja $\Lambda \in \mathcal{L}_\nu(L)$. Consideremos a aplicação de tempo 1 do fluxo ϕ, isto é, $\widetilde{\phi}(x) = \phi_\Lambda(1,x)$, tal que $x \in \mathbb{R}^n$.

Vamos mostrar que $\widetilde{\phi} \in \mathcal{L}_\mu(e^L)$; Utilizando o Teorema 4, observamos que o fluxo $\phi = \phi_\Lambda$ satisfaz a seguinte relação:

$$\phi(t,x) = e^{Lt}x + \int_0^t e^{L(t-s)}\lambda(\phi(s,x))dt$$

consequentemente

$$\widetilde{\phi}(x) = \phi(1,x) = e^{L}x + \int_0^1 e^{L(1-s)}\lambda(\phi(s,x))dt$$

logo temos que

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\phi}(x) - e^L(x)\| &= \left\| \int_0^1 e^{L(1-s)}\lambda(\phi(s,x))dt \right\| \\
&\leq \|e^L\| \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \|\lambda(x)\| \\
&\leq \|e^L\|\nu \\
&\leq \mu
\end{aligned}$$

Para mostrar que $\widetilde{\phi} - e^L$ é Lipschitz, precisamos primeiro mostrar que $\phi(t,x)$ é Lipschitziana na segunda variável, $\forall\ t \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
\|\phi(t,x) - \phi(t,y)\| &= \|e^{Lt}(x-y) + \int_0^t e^{L(1-s)}\left[\lambda(\phi(s,x))) - \lambda(\phi(s,x)ds\right]\| \\
&\leq \|e^L\|\|x-y\| + \|e^L\|\nu \int_0^t \|\phi(s,x) - \phi(s,y)\|ds \\
&\leq \|e^L\|\|x-y\| + \|e^L\|\nu \int_0^t \|\phi(s,x) - \phi(s,y)\|ds
\end{aligned}$$

utilizando a desigualdade de Gronwall (veja o Teorema 3) temos que

$$\begin{aligned}
\|\phi(t,x) - \phi(t,y)\| &\leq \|e^L\|\|x-y\|e^{t\|e^L\|\nu} \\
&\leq \|e^L\|e^{\|e^L\|}\|x-y\|, \text{para todo}\, t \in [0,1]
\end{aligned}$$

sendo assim

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\phi}(x) - e^L x - \widetilde{\phi}(y) - e^L y\| &= \left\| \int_0^1 e^{L(1-s)}\left(\lambda(\phi(s,x)) - \lambda(\phi(s,y))\right) ds \right\| \\
&\leq \nu\|e^L\| \sup_{t\in[0,1]} \|\phi(s,x) - \phi(s,y)\| \\
&\leq \nu\|e^L\|^2 e^{\|e^L\|}\|x-y\| \\
&\leq \mu\|x-y\|
\end{aligned}$$

dessa forma concluímos que $\widetilde{\phi} \in \mathcal{L}_\mu(e^L)$, e utilizando o Lema 2 constatamos que existe $h = h_{\widetilde{\phi}}$ tal que

$$h \circ \widetilde{\phi}(x) = e^L h(x)$$

Definimos $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $H(x) = \int_0^1 e^{-Ls}h(\phi(s,x))ds$. Mostraremos que H conjuga ϕ com $e^{Lt}x$. Observe que

$$\begin{aligned}
e^{Lt}H(x) &= \int_0^1 e^{L(t-s)}h(\phi(s,x))ds \\
&= \int_0^1 e^{L(t-s)}h(\phi(s-t,\phi(t,x))ds \\
&= \int_{-t}^{1-t} e^{-Lu}h(\phi(u,\phi(t,x)))du \\
&= \int_{-t}^{0} e^{-Lu}h(\phi(u,\phi(t,x)))du + \int_{0}^{1-t} e^{-Lu}h(\phi(u,\phi(t,x)))du \\
&= \int_{-t}^{0} e^{-Lu}h(\phi(u,\phi(t,x)))du + \int_{0}^{1-t} e^{-Lu}h(\phi(u,\phi(t,x)))du \\
&= \int_{-t}^{0} e^{-L(u+1)}e^{L}h(\phi(u,\phi(t,x)))du + \int_{0}^{1-t} e^{-Lu}h(\phi(u,\phi(t,x)))du \\
&= \int_{-t}^{0} e^{-L(u+1)}h(\phi(u+1,\phi(t,x)))du + \int_{0}^{1-t} e^{-Lu}h(\phi(u,\phi(t,x)))du \\
&= \int_{0}^{1} e^{-Lv}h(\phi(v,\phi(t,x)))dv + \int_{0}^{1-t} e^{-Lv}h(\phi(v,\phi(t,x)))dv \\
&= \int_{0}^{1} e^{-Lx}h(\phi(v,\phi(t,x)))dv \\
&= H(\phi(t,x))
\end{aligned}$$

Basta mostrar agora que H é homeomorfismo, para isso note que para $t = 1$ a conjugação é satisfeita, sendo assim

$$e^{L}H(x) = H(\phi(1,x)) = H(\widetilde{\phi}(x))$$

mas h é a única função com essa propriedade, dessa forma concluímos que $H = h$ e, consequentemente, H é homeomorfismo que depende continuamente da função $\lambda \in \mathcal{L}_\nu(L)$

■

Teorema 5. *(Hartman- Grobman) Sejam $X : \Delta \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$ e p um ponto singular hiperbólico. Existem vizinhanças W de p em Δ e V de 0 em $\mathbb{R}^n$ tais que $X|_W$ é topologicamente conjugado a $DX(p)|_V$.*

Demonstração. Primeiramente note que podemos supor, sem perda de generalidade, que $p = 0$. Pois caso ocorra $p \neq 0$, consideramos o campo $\widetilde{X} : \{u - p\,;\ u \in \Delta\} \to \mathbb{R}^n$, tal que $\widetilde{X}(u) = X(p+u)$, dessa forma temos que o fluxo de $\widetilde{X}$ é conjugado ao de X por uma translação; se provarmos que $\widetilde{X}$ é conjugado a $DF(p)$ numa vizinhança suficientemente próxima da origem, então pela transitividade da conjugação demonstramos o teorema.

Sendo assim supomos $p = 0$. Como 0 é um ponto singular hiperbólico, então os autovalores de $DX(0)$ possuem parte real diferente de zero, dessa forma $e^{DX(0)}$ é um isomorfismo hiperbólico. Pelo Lema 3 temos a existência de $\nu > 0$ tal que, para todo campo de vetores $\Lambda = DX(0) + \lambda$ tal que $\Lambda \in \mathcal{L}_\nu(DX(0))$, existe um homeomorfismo que conjuga o fluxo de Λ com o fluxo da equação linear $DX(0)x$.

Aplicando o Lema 1 em X e $\nu > 0$, existem $r_1 > r_2 > 0$ e $G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ tal que:

1. $G = X$ em $B_{r_2}(0)$
2. $G = DX(0)$ fora de $B_{r_1}(0)$
3. A função $\Psi = G - DX(0)$ é limitada por ν
4. Ψ é ν-Lipschitz
5. Ψ é uniformemente contínua

Como $G = DX(0)+\Psi$, então $G \in \mathcal{L}_\nu(DX(0))$. Sejam $\Phi(t,x)$ e $g(t,x)$ os respectivos fluxos dos campos vetoriais X e G. Finalmente, utilizando o Lema 3, sabemos que existe um homeomorfismo H tal que $H(g(t,x)) = e^{DX(0)t}H(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$.

Uma vez que $X\big|_{B_{r_2}(0)} = G\big|_{B_{r_2}(0)}$, temos pela unicidade de solução da *EDO* que $\Phi(t,x) = g(t,x)$, $\forall\ x \in B_{r_2}(0)$ e $(t,x) \in W$, onde W é o domínio de definição das soluções do problema de Cauchy

$$\begin{cases} x' = X\big|_{B_{r_2}(0)}(x) \\ x(0) = x_0,\ x_0 \in B_{r_2}(0) \end{cases}$$

Uma vez que W é aberto encontramos uma vizinhança de 0 que satisfaz

$$H(\Phi(t,x)) = e^{DX(0)t}H(x),\ \forall\ (t,x) \in W.$$

■

4 Referências Bibliográficas

Referências

[1] H. M. Rodrigues, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Instituto de Ciências Matemática e de Computação (ICMC) - USP, 2012, **p** 220.

[2] J. Sotomayor, *Liçoes de Equações Diferenciais Ordinárias*- Rio de Janeiro: Instituto de Matemática pura e Aplicada, Projeto Euclides, 1979.