# Formas Normais e Teorema da Variedade Central

Guilherme Tavares da Silva

28 de abril de 2017

## 1 Introdução

A determinação do tipo topológico das singularidades de uma equação diferencial é fundamental no estudo das suas bifurcações e, portanto, da sua estabilidade estrutural. No caso hiperbólico, o Teorema de Hartman-Grobman resolve completamente este problema. Porém, no caso não hiperbólico, uma análise mais sofisticada torna-se necessária.

Nesta análise, o passo inicial é dado pelo Teorema da Variedade Central, que permite-nos reduzir a dimensão do problema ao focar apenas em um subsistema de interesse. Em seguida, afim de simplificar este subsistema, pode-se calcular sua forma normal de Poincaré-Dulac, que permite-nos eliminar alguns termos da série de Taylor ao redor da singularidade.

Neste texto, introduzimos os principais conceitos e resultados desta análise. Inicialmente, apresentamos o Teorema da Variedade Central e, em seguida, a forma normal de Poincaré-Dulac.

## 2 Teorema da Variedade Central

Seja $\mathfrak{X}^r$ o espaço dos campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$ de classe $C^r$. Seja $\mathbf{f} \in \mathfrak{X}^r$ com $r \geq 1$. Sem perda de generalidade, suponha que $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e seja $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{0})$.

Se $\mathbf{0}$ for uma singularidade hiperbólica, então o Teorema de Hartman-Grobman garante que o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

é localmente topologicamente conjugado ao sistema linear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{2}$$

Em outras palavras, o Teorema de Hartman-Grobman resolve completamente o problema da determinação do tipo topológico de singularidades hiperbólicas.

Se $\mathbf{0}$ não for uma singularidade hiperbólica, então uma análise mais sofisticada torna-se necessária. O passo inicial nesta análise é dado com o

Teorema da Variedade Central que, conforme ficará claro a seguir, é utilizado para reduzir a dimensão do problema. Para enunciar este teorema na sua versão mais geométrica, denote por $E^c$, $E^s$ e $E^u$ os subespaços de $\mathbb{R}^n$ gerados pelos autovetores associados a autovalores de $\mathbf{A}$ com parte real nula, negativa e positiva, respectivamente.

**Teorema 1.** *Seja $\mathbf{f} \in \mathfrak{X}^r$ com $r \geq 1$ e fluxo $\varphi$. Suponha que $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Sejam $c$, $s$ e $u$ as dimensões de $E^c$, $E^s$ e $E^u$, respectivamente. Então, existem*

*(a) uma $c$-variedade $W^c(\mathbf{0})$ de classe $C^{r-1}$ tangente a $E^c$ em $\mathbf{0}$,*

*(b) uma $s$-variedade $W^s(\mathbf{0})$ de classe $C^r$ tangente a $E^s$ em $\mathbf{0}$,*

*(c) uma $u$-variedade $W^u(\mathbf{0})$ de classe $C^r$ tangente a $E^u$ em $\mathbf{0}$.*

*Mais ainda, todas as variedades acima são invariantes pelo fluxo $\varphi$. Além disso, $W^s(\mathbf{0})$ e $W^u(\mathbf{0})$ são únicas, sendo $\varphi_t|W^s(\mathbf{0})$ uma contração e $\varphi_t|W^u(\mathbf{0})$ uma expansão.* $\square$

**Definição 1.** *Considerando o Teorema 1, dizemos que $W^c(\mathbf{0})$, $W^s(\mathbf{0})$, $W^u(\mathbf{0})$ são as variedades **central**, **estável** e **instável** de (1) em $\mathbf{0}$, respectivamente.*

Apesar de dar uma ideia geométrica, o Teorema da Variedade Central como enunciado acima não deixa explícito como calcular as variedades. Para enunciar este teorema na sua versão mais analítica, observamos que, sem perda de generalidade, o sistema (1) pode ser escrito[1] na forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_u) \\ \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{A}_s\mathbf{x}_s + \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_u) \\ \dot{\mathbf{x}}_u &= \mathbf{A}_u\mathbf{x}_u + \mathbf{f}_u(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_u) \end{cases}, \tag{3}$$

onde $(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_u) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u$; $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{A}_s$ e $\mathbf{A}_u$ têm apenas autovalores com parte real nula, negativa e positiva, respectivamente; $\mathbf{f}_c(\mathbf{0}) = \mathbf{f}_s(\mathbf{0}) = \mathbf{f}_u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $D\mathbf{f}_c(\mathbf{0}) = D\mathbf{f}_s(\mathbf{0}) = D\mathbf{f}_u(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

**Teorema 2.** *Seja $\mathbf{f} \in \mathfrak{X}^r$ com $r \geq 1$. Suponha que $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e considere o sistema (3). Então, existem funções $\mathbf{h}_s(\mathbf{x}_c)$ e $\mathbf{h}_u(\mathbf{x}_c)$ de classe $C^1$ satisfazendo*

$$\begin{aligned} D\mathbf{h}_s(\mathbf{x}_c)\left[\mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_c, \mathbf{h}_s(\mathbf{x}_c), \mathbf{h}_u(\mathbf{x}_c))\right] &= \mathbf{A}_s\mathbf{h}_s(\mathbf{x}_c) + \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_c, \mathbf{h}_s(\mathbf{x}_c), \mathbf{h}_u(\mathbf{x}_c)) \\ D\mathbf{h}_u(\mathbf{x}_c)\left[\mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_c, \mathbf{h}_s(\mathbf{x}_c), \mathbf{h}_u(\mathbf{x}_c))\right] &= \mathbf{A}_u\mathbf{h}_u(\mathbf{x}_c) + \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_c, \mathbf{h}_s(\mathbf{x}_c), \mathbf{h}_u(\mathbf{x}_c)) \end{aligned} \tag{4}$$

*e tais que o sistema (1), que pode ser escrito na forma (3), é topologicamente conjugado ao sistema*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_c, \mathbf{h}_s(\mathbf{x}_c), \mathbf{h}_u(\mathbf{x}_c)) \\ \dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{A}_s\mathbf{x}_s \\ \dot{\mathbf{x}}_u &= \mathbf{A}_u\mathbf{x}_u \end{cases} \tag{5}$$

[1] Via forma canônica de Jordan.

*para* $(\mathbf{x}_c, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_u) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^u$ *em uma vizinhança da origem.* □

Em outras palavras, o Teorema 2 generaliza o Teorema de Hartman-Grobman. Porém, para determinar o tipo topológico de uma singularidade deve-se conhecer o comportamento do sistema sobre a sua variedade central, isto é, o problema fica reduzido ao estudo da equação

$$\dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c\mathbf{x}_c + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_c, \mathbf{h}_s(\mathbf{x}_c), \mathbf{h}_u(\mathbf{x}_c)),$$

que tem dimensão $c \leq n = c + s + u$.

**Exemplo 1.** *Em* $\mathbb{R}^2$*, considere o seguinte sistema com* $c = s = 1$

$$\begin{cases} \dot{x} & = & x^2y - x^5 \\ \dot{y} & = & -y + x^2 \end{cases}.$$

*Neste caso, temos* $\mathbf{A}_c = [0]$, $\mathbf{A}_s = [-1]$, $\mathbf{f}_c(x,y) = x^2y - x^5$ *e* $\mathbf{f}_s(x,y) = x^2$. *Assim, substituindo as expansões*

$$h_s(x) = ax^2 + bx^3 + O(x^4) \qquad e \qquad Dh_s(x) = 2ax + 3bx^2 + O(x^3)$$

*em (4) obtemos a equação*

$$(2ax + 3bx^2 + \cdots)(ax^4 + bx^5 + \cdots - x^5) + ax^2 + bx^3 + \cdots - x^2 = 0,$$

*que nos dá* $a = 1$, $b = 0$ *e* $c = 0$*, ou seja,*

$$h_s(x) = x^2 + O(x^5)$$

*e, portanto, do Teorema 2 segue que o sistema inicial é localmente topologicamente conjugado ao sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} & = & x^4 + O(x^5) \\ \dot{y} & = & -y \end{cases},$$

*que tem uma sela-nó na origem.*

# 3 Formas Normais

Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz quadrada e $\mathbf{f} \in \mathfrak{X}^\infty$ um campo vetorial com $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $D\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Considere o sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{6}$$

que, formalmente, pode ser escrito na forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) + \cdots + \mathbf{f}_p(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{x}|^{p+1}), \tag{7}$$

onde $\mathbf{f}_r \in H_r^n \subset \mathfrak{X}^\infty$, o subespaço dos campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são polinômios homogêneos de grau $r$.

Na seção anterior, verificamos que equações da forma (7) surgem naturalmente na determinação do tipo topológico de singularidades não hiperbólicas. Nesta seção, verificaremos que estas equações podem ser simplificadas através de mudanças de variáveis que eliminam alguns dos termos de grau $r$, facilitando o estudo da sua dinâmica.

**Exemplo 2.** *Em $\mathbb{R}$, considere o sistema*

$$\dot{x} = ax + bx^2 + O(x^3).$$

*Aplicando a mudança de variáveis $x = y + \beta y^2$ obtemos*

$$a(y + \beta y^2) + b(y + \beta y^2)^2 + \cdots = \dot{x} = \dot{y} + 2\beta y \dot{y} = (1 + 2\beta y)\dot{y}$$

*e, portanto,*

$$\dot{y} = \frac{ay + a\beta y^2 + by^2 + \cdots}{1 + 2\beta y} = ay + (b - a\beta)y^2 + \cdots,$$

*onde usamos que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-r)^k = \frac{1}{1 + r},$$

*para $|r| < 1$. Logo, se $a \neq 0$, então podemos tomar $\beta = b/a$, obtendo*

$$\dot{y} = ay + O(y^3),$$

*ou seja, eliminamos o termo de grau 2 da equação inicial.*

Dado o Exemplo anterior como motivação, aplicando a mudança de variáveis

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y})$$

com $\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ e $D\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ à equação (6) obtemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} + D\mathbf{h}(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}} = (\mathbf{I} + D\mathbf{h}(\mathbf{y}))\dot{\mathbf{y}}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{y}} &= (\mathbf{I} + D\mathbf{h}(\mathbf{y}))^{-1}\dot{\mathbf{x}} \\
&= (\mathbf{I} + D\mathbf{h}(\mathbf{y}))^{-1}\left[\mathbf{A}(\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y})) + \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y}))\right] \\
&= (\mathbf{I} - D\mathbf{h}(\mathbf{y}))\left[\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{A}\mathbf{h}(\mathbf{y}) + \mathbf{f}(\mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y}))\right] + \cdots,
\end{aligned} \tag{8}$$

onde usamos que

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-\mathbf{B})^k = (\mathbf{I}+\mathbf{B})^{-1},$$

para $||\mathbf{B}|| < 1$.

Agora, considere expansões formais

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{r=2}^{\infty}\mathbf{f}_r(\mathbf{x}) \qquad e \qquad \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \sum_{r=2}^{\infty}\mathbf{h}_r(\mathbf{x}) \tag{9}$$

com $\mathbf{f}_r, \mathbf{h}_r \in H_r^n$. Substituindo (9) em (8) obtemos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} &+ [\mathbf{A}\mathbf{h}_2(\mathbf{y}) + \mathbf{f}_2(\mathbf{y}) - D\mathbf{h}_2(\mathbf{y})\mathbf{A}\mathbf{y}] \\ &+ \sum_{r=3}^{\infty}[\mathbf{A}\mathbf{h}_r(\mathbf{y}) + \mathbf{g}_r(\mathbf{y}) - D\mathbf{h}_r(\mathbf{y})\mathbf{A}\mathbf{y}]\end{aligned}$$

onde $\mathbf{g}_r$ depende somente de $\mathbf{f}_2, \cdots, \mathbf{f}_{r-1}$ e $\mathbf{h}_2, \cdots, \mathbf{h}_{r-1}$.

Logo, para eliminar o termo de grau 2 basta escolher $\mathbf{h}_2 \in H_2^n$ tal que

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{y}) = D\mathbf{h}_2(\mathbf{y})\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{h}_2(\mathbf{y}); \tag{10}$$

e, para eliminar o termo de grau $r \geq 3$ basta escolher $\mathbf{h}_r \in H_r^n$ tal que

$$\mathbf{g}_r(\mathbf{y}) = D\mathbf{h}_r(\mathbf{y})\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{h}_r(\mathbf{y}). \tag{11}$$

Assim, dado $n \geq 2$, $r \in \mathbb{N}$ e considerando o operador linear $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^{r,n} : H_r^n \to H_r^n$ definido por

$$\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^{r,n}(\mathbf{h})(\mathbf{y}) = D\mathbf{h}(\mathbf{y})\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{h}(\mathbf{y}),$$

então as equações (10) e (11) podem ser escritas na forma

$$\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^{2,n}(\mathbf{h}_2) = \mathbf{f}_2 \qquad e \qquad \mathbf{L}_{\mathbf{A}}^{r,n}(\mathbf{h}_r) = \mathbf{g}_r,$$

Ou seja, um monômio $\mathbf{w}$ de grau $r$ pode ser eliminado se, e somente se, $\mathbf{w}$ está na imagem de $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^{r,n}$. Em particular, provamos o seguinte resultado:

**Lema 1.** *Se $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^{r,n} : H_r^n \to H_r^n$ for invertível, então a equação diferencial*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}_r(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{x}|^{r+1}),$$

*com $\mathbf{f}_r \in H_r^n$, pode ser transformada na equação*

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + O(|\mathbf{y}|^{r+1})$$

*através da mudança de variáveis $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{h}_r(\mathbf{y})$, onde $\mathbf{h}_r = (\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^{r,n})^{-1}(\mathbf{f}_r)$.* □

De modo mais geral, aos invés de estudar a invertibilidade de $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^{r,n}$, podemos apenas estudar sua imagem. Neste contexto, uma boa estratégia seria considerar o complemento ortogonal para a imagem de $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^{r,n}$ em $H_r^n$.

**Lema 2.** *Com respeito ao produto interno usual de $H_r^n$ temos que $\left(\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^{r,n}\right)^* = \mathbf{L}_{\mathbf{A}^*}^{r,n}$ e, portanto,*

$$H_r^n = \mathbf{L}_{\mathbf{A}}^{r,n}(H_r^n) \oplus \ker(\mathbf{L}_{\mathbf{A}^*}^{r,n}).$$

□

Para este subespaço complementar em particular, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 3.** *Considere a equação diferencial*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) + \cdots + \mathbf{f}_p(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{x}|^{p+1}), \tag{12}$$

*com $\mathbf{f}_r \in H_r^n$. Então, existe uma mudança de coordenadas polinomial da forma $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{h}(\mathbf{y})$ que transforma a equação acima em*

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{w}_2(\mathbf{y}) + \cdots + \mathbf{w}_p(\mathbf{y}) + O(|\mathbf{y}|^{p+1}), \tag{13}$$

*com $\mathbf{w}_r \in \ker(\mathbf{L}_{\mathbf{A}^*}^{r,n})$.* □

**Definição 2.** *Considerando o Teorema 3, dizemos que (13) é a* ***forma normal de Poincaré-Dulac*** *de (12).*

No caso particular em que $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonal, o cálculo do $\ker(\mathbf{L}_{\mathbf{A}^*}^{r,n})$ pode ser simplificado. De fato, temos o seguinte resultado:

**Lema 3.** *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma matriz diagonal com autovalores $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Então, $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^{r,n}$ é invertível se, e somente se,*

$$\langle m, \lambda\rangle - \lambda_i \neq 0$$

*para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$ e $m = (m_1, \cdots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ com $\sum_{j=1}^n m_j \geq 2$.*

*Demonstração.* Observe que

$$\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^{r,n}(\mathbf{x}^m \mathbf{e}_i) = (\langle m, \lambda\rangle - \lambda_i)\, \mathbf{x}^m \mathbf{e}_i$$

e, portanto, os números $\langle m, \lambda\rangle - \lambda_i$ são os autovalores de $\mathbf{L}_{\mathbf{A}}^{r,n}$. □

**Definição 3.** *Dizemos que um monômio $\mathbf{x}^m \mathbf{e}_i$ é* ***ressonante*** *de ordem $r$ se $\langle m, \lambda\rangle - \lambda_i = 0$ com $\sum_{j=1}^n m_j = r$.*

Em outras palavras, os únicos monômios presentes na forma normal de Poincaré-Dulac são os ressonantes. Mais especificamente:

**Teorema 4.** *A equação diferencial*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}) + \cdots + \mathbf{f}_p(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{x}|^{p+1}),$$

*com* $\mathbf{f}_r \in H_r^n$ *é* $C^p$*-conjugada à equação*

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{w}_2(\mathbf{y}) + \cdots + \mathbf{w}_p(\mathbf{y}) + O(|\mathbf{y}|^{p+1}),$$

*onde* $\mathbf{w}_r$ *é um monômio ressonante de ordem* $r$*, para todo* $r \in \{2, \cdots, p\}$*.* $\square$

**Exemplo 3.** *Em* $\mathbb{R}^2$*, considere o seguinte sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + p(x, y) \\ \dot{y} &= x + q(x, y) \end{cases}$$

*onde* $p$ *e* $q$ *são funções* $C^\infty$ *tais que* $p(0,0) = q(0,0) = 0$ *e* $Dp(0,0) = Dq(0,0) = (0,0)$*. Calculando as ressonâncias, pode-se provar que o sistema acima é* $C^p$*-conjugado ao sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + \sum_{k=1}^{p} (x^2 + y^2)^k (a_k x - b_k y) + O(|(x, y)|^{p+1}) \\ \dot{y} &= x + \sum_{k=1}^{p} (x^2 + y^2)^k (a_k y - b_k x) + O(|(x, y)|^{p+1}) \end{cases}$$

*onde* $a_k$ *e* $b_k$ *são coeficientes que dependem de* $p$ *e* $q$*.*

# Referências


[1] Carr, J. *Applications of Centre Manifold Theory.* Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 1981.

[2] Chow, S., Li, C., and Wang, D. *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields.* Cambridge University Press, 1994.

[3] Guckenheimer, J., and Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* Applied Mathematical Sciences. Springer New York, 2002.

[4] Martins, R. M. Notas de aula - Introdução aos Sistemas Dinâmicos, 2016.

[5] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Texts in Applied Mathematics. Springer New York, 2008.