**GEOMETRIA PLANA E DESENHO GEOMÉTRICO**

Primeiro semestre de 2003 MA520Z
Profa. Sandra Augusta Santos Sala IM111

# Atividade 9
# Teorema de Pitágoras

## Introdução e objetivos

Nesta atividade, o Teorema de Pitágoras é abordado sob os pontos de vista geométrico, analítico, algébrico e histórico. Iniciamos com a retomada da sua prova (e a de seu recíproco) usando a teoria de semelhança de triângulos (capítulo **5** do livro-texto, ref.[4]). A seguir, tendo como base a axiomática do capítulo **7** (ref. [4]), com os postulados e resultados decorrentes envolvendo áreas de regiões planas simples, resgatamos outras provas, envolvendo o conceito de área. Este é o caso das provas sugeridas como exercícios no capítulo **7** (exercícios **7.4** e **7.6**), assim como a prova que aparece nos *Elementos* de Euclides, recuperada como preparação desta atividade. No laboratório exploramos 'provas sem palavras' da ref. [3], cuja justificativa é elaborada na forma de um texto escrito (carta para a tia Belarmina), a ser entregue no final da aula.

**Palavras-chave:** Teorema de Pitágoras; triângulo retângulo; cateto; hipotenusa; semelhança de triângulos; quadriláteros; áreas de regiões planas simples.

## Preparação

i. Reveja as provas do **Teorema de Pitágoras** e de seu **recíproco** (teoremas **5.8** e **5.9** da ref. [4]). Procure detalhar todas as passagens e identificar os resultados nos quais estas provas se apóiam.

ii. Faça um resumo com as **definições** e os **postulados,** bem como os **enunciados** dos **teoremas** e **lemas** do capítulo **7** (ref. [4]).

iii. O exercício abaixo foi preparado com base na referência [2]. Resolvendo-o, você estará recuperando a prova que aparece nos *Elementos* de Euclides, (Proposição 47 do livro 1, cf. ref. [5]), escritos por volta de 300 a.C.

Responda às questões **(a)-(i)**, justificando cada passagem com resultados do capítulo **7** (ou de capítulos anteriores) do livro-texto (ref. [4]). **Faça-o em folha separada, para ser entregue no início da aula de laboratório, dia 7 de maio.**

O Teorema de Pitágoras era conhecido dos antigos gregos na seguinte forma:

*A área do quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os catetos.*

As questões a seguir, juntamente com as respostas, constituem o roteiro de uma prova para o Teorema de Pitágoras. A figura da direita deve ser usada como apoio na demonstração.

**(a)** Por que $R\hat{A}B \cong C\hat{A}M$ ?

**(b)** Por que $\Delta RAB \cong \Delta CAM$ ?

**(c)** Por que *área*( $\Delta RAB$ ) = *área*( $\Delta CAM$ )?

**(d)** Alguma altura de $\Delta RAB$ é igual a AC?

**(e)** Por que *área*( $ACSR$ ) = 2 *área*( $\Delta RAB$ )?

**(f)** Por que *área*( $AMQP$ ) = 2 *área*( $\Delta CAM$ )?

**(g)** Por que *área*( $ACSR$ ) = *área*( $AMQP$ )?

**(h)** Por que *área*( $BHGC$ ) = *área*( $PQKB$ )?

**(i)** Por que *área*( $AMKB$ ) = *área*( $AMQP$ ) + *área*( $PQKB$ )?

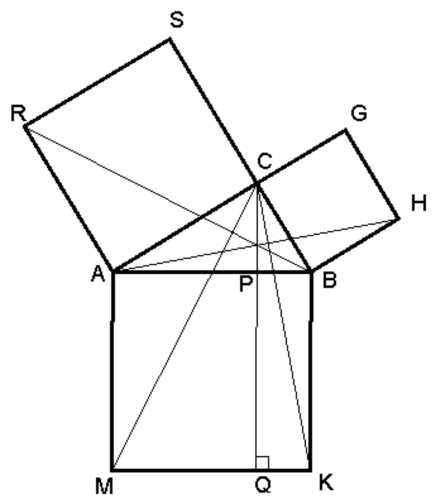


Diagrama conhecido como ‘capelo franciscano’ ou ‘cadeira de noiva’ (ref. [1]).

# No laboratório

Escolha uma das pranchas **I –VI**, em anexo, extraídas da referência [3], e explore a construção correspondente no programa *Tabulæ*. Seu objetivo é a busca de elementos para compreender e interpretar a imagem escolhida, tornando-o(a) capaz de explicar como ela pode ser usada para mostrar o resultado expresso pelo Teorema de Pitágoras.

# Para entregar

Prepare uma carta para a sua tia Belarmina, explicando a ela a ‘prova sem palavras’ da prancha correspondente à escolha que você fez no laboratório, que deve ser especificada claramente. Como apoio para a sua argumentação, inclua figuras e nomeie os elementos geométricos que julgar necessários (pontos, retas, segmentos, ângulos, etc.). Mas lembre-se, já faz um bom tempo que a sua tia Belarmina estudou geometria! Você deve ajudá-la a lembrar-se de tudo o que for essencial para acompanhar e compreender o seu texto.

# Referências


[1] H. Eves, *Introdução à História da Matemática*. 3 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2002.

[2] E. E. Moise & F. L. Downs Jr., *Geometria Moderna* - Parte I, São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

[3] R. B. Nelsen, *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*, Washington, DC: The Mathematical Association of America, 1993.

[4] E. Q. F. Rezende & M. L. B. Queiroz, *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas.* Campinas, SP: Editora da Unicamp; São Paulo: Imprensa Oficial, 2000.

[5] D. Wells, *You are a Mathematician*. New York: Penguin Books, 1995.

## Curiosidade

A figura ao lado auxilia a acompanhar a prova idealizada por Leonardo da Vinci (1452-1519) (cf. ref. [1], p.118). Ele acrescentou à figura padrão, com o triângulo retângulo *ABC* e os quadrados apoiados em seus catetos e hipotenusa, uma cópia do triângulo original no lado oposto do quadrado maior, e uniu os vértices dos quadrados menores, para obter uma terceira cópia do triângulo dado. Acrescentou ainda as linhas mais finas (segmentos *MN* e *CP*).

A idéia da prova é a seguinte: excluindo-se o quadrado *ABQR* e o triângulo *PQR*, a figura obtida consiste em dois quadriláteros, simétricos em relação à reta *MN*. O triângulo *ABC* original, juntamente com o quadrado maior, e o triângulo *PQR*, também formam dois quadriláteros, congruentes, devido à simetria em relação à reta *CP*. Além disso, se o quadrilátero *MNAB* for girado, no sentido anti-horário, de um ângulo reto, em torno do ponto *B*, ele coincidirá com o quadrilátero *CPQB*. Portanto, todos os quadriláteros têm a mesma área e, subtraindo-se as áreas dos triângulos, obtém-se o resultado desejado (cf. ref. [5], p.254).

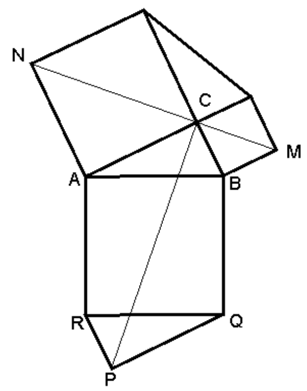


Diagrama ilustrativo para a prova de Leonardo da Vinci para o Teorema de Pitágoras, baseada na *congruência por subtração* (veja definição abaixo).

## Um pouco de história...

O Teorema de Pitágoras é possivelmente o mais antigo resultado geométrico que temos notícia. Pitágoras viveu por volta do ano 540 a.C., primeiramente na ilha de Samos, no Mar Egeu, e posteriormente, no sul da Itália. Ele e seus alunos dedicaram-se à matemática, astronomia e filosofia, constituindo uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimônias – os Pitagóricos. Atribui-se a eles o desenvolvimento da geometria como ciência: demonstraram o Teorema de Pitágoras e descobriram a existência dos números irracionais. Eram igualmente bons em astronomia: sabiam, no sexto século antes de Cristo, que a Terra é redonda e que se move ao redor do sol. Não deixaram trabalhos escritos e, assim, ninguém sabe com certeza como chegaram a estas conclusões ou quais de suas descobertas são devidas a Pitágoras, pessoalmente. A principal fonte de informações para os primeiros passos da matemática grega é o chamado *Sumário Eudemiano*, escrito por Proclo no século V d.C.

De qualquer maneira, sabe-se que o Teorema de Pitágoras já era conhecido pelos babilônios do tempo de Hamurabi, o legislador, mais de um milênio antes da época de Pitágoras, e conjectura-se que uma forma deste teorema já era conhecida pelo homem neolítico, na Europa. O Teorema de Pitágoras também apareceu na China, em um manuscrito datado de cerca de 200 a.C., o "*Chou pei suan ching*" (veja Prancha I).

Sendo tão antigo, famoso e importante, e talvez até por outras razões, centenas de provas para o Teorema de Pitágoras foram publicadas. O livro *The Pythagorean Proposition*, elaborado por Elisha Scott Lomis e publicado em 1940, apresenta 367 provas, e sem dúvida, outras foram descobertas depois. Qual a mais convincente? Qual a mais engenhosa? Qual a mais simples? A prova de Euclides (veja Preparação, item iii), tão convincente quanto qualquer outra prova da geometria elementar, não enfatiza o resultado em si: por que o Teorema de Pitágoras deveria ser válido? Embora possa ser provado com argumentos de semelhança (cf. Teo. 5.8, ref.[4]), também são bastante comuns demonstrações por *decomposição*, provavelmente a estratégia empregada pelo próprio Pitágoras (ou por membros de sua confraria). Duas áreas (ou volumes) são *congruentes por adição* se podem ser decompostos em pares correspondentes de partes congruentes, e são *congruentes por subtração* quando se podem somar a eles pares correspondentes de partes congruentes de modo a restarem duas novas figuras congruentes por adição.

As pranchas **I** a **VI** em anexo, extraídas da referência [3], ilustram algumas possibilidades para se mostrar o Teorema de Pitágoras por meio de 'provas sem palavras'.

Texto elaborado com base em informações de [1], [2] e [5].