GEOMETRIA PLANA E DESENHO GEOMÉTRICO

Primeiro semestre de 2003 MA520Z
Profa. Sandra Augusta Santos Sala IM111

Atividade 3

O Postulado de Pasch

Introdução e objetivos

O chamado *Postulado de Pasch* (ver quadro abaixo) é uma referência ao matemático alemão Moritz Pasch (1843-1931), que o enunciou pela primeira vez em 1882, e o utilizou em seu trabalho de sistematização da Geometria no lugar do *Postulado da Separação do Plano* (conforme ref.[1], p.61, e exercício 1.10 da ref. [3], p.29)

Nesta atividade, trabalharemos com os conceitos primitivos de *ponto* e *reta* e com as noções de *estar entre* e de *separação*, envolvendo segmentos, semi-retas e semiplanos, com ênfase na distinção entre um postulado e um teorema. Exercitaremos o raciocínio lógico por meio de provas formais. A ferramenta computacional servirá como ambiente de experimentação e rascunho no acompanhamento das demonstrações.

Palavras-chave: reta; ponto; estar entre; separação; segmento; semi-reta; semiplano; conjunto convexo; postulado; teorema.

Postulado de Pasch (PP)	*Postulado da Separação do Plano* (PSP)
Dados três pontos A, B e C, não colineares e uma reta r, no plano determinado por estes três pontos, e que não contém nenhum deles, se r passa por um ponto de $\overline{AC}$ então também passa por um ponto de $\overline{BC}$ ou de $\overline{AB}$.	Dada uma reta, os pontos do plano que a contém e que não pertencem a ela formam dois conjuntos disjuntos tais que (1) cada um dos conjuntos é convexo; (2) se o ponto P pertence a um dos conjuntos e Q ao outro, então o segmento $\overline{PQ}$ interseciona a reta dada.

Preparação

i. Dê três exemplos de conjuntos que sejam a *união de dois conjuntos disjuntos*. Faça uma das descrições por meio de esquemas ou diagramas, a outra em palavras e a terceira usando símbolos matemáticos.

ii. Reveja as definições de *conjunto convexo*, *semi-reta* e *semiplano*, e mostre que:

(a) uma semi-reta é um conjunto convexo;

(b) um semiplano, unido com sua reta origem, formam um conjunto convexo.

iii. Seja **A** um conjunto de pontos e seja **B** a união de todos os segmentos da forma $\overline{PQ}$, onde P e Q pertencem a **A**. Pode-se afirmar que o conjunto **B** é convexo? Justifique. (Exercício 12 da ref. [2],p.63)

iv. **Um lado**. Mostre que, assumindo o *Postulado da Separação do Plano* como postulado, o *Postulado de Pasch* vale como um teorema. Esquematicamente, (PSP) $\rightarrow$ (PP). Este é exatamente o exercício 1.10 de nosso livro-texto: ref. [3], p.29. Sugestão: suponha, como hipótese de absurdo, que (PP) não vale, e chegue a uma contradição.

No laboratório

O outro lado. Analisaremos agora a implicação: (PP) $\rightarrow$ (PSP). Em palavras, assumindo a validade do *Postulado de Pasch*, vamos mostrar que o *Postulado da Separação do Plano* vale como um teorema. Seguiremos o roteiro da ref. [1], p.62-64, com pequenas modificações.

Inicialmente, vejamos que, *se três pontos pertencem a uma mesma reta, para eles se verifica uma proposição análoga à do Postulado de Pasch: toda reta que corte um dos três segmentos determinados pelos pontos dados, mas não passe por nenhum deles, corta também mais um, e apenas mais um, dos outros dois segmentos.*

Suponhamos, sem perda de generalidade, que *A–B–C,* isto é, que B está entre A e C. Então, todos os pontos de $\overline{AB}$ e de $\overline{BC}$ pertencem a $\overline{AC}$, e cada ponto de $\overline{AC}$ pertence a $\overline{AB}$ ou a $\overline{BC}$ (B pertence a ambos). Portanto, se uma reta nas condições enunciadas corta $\overline{AB}$, ela não corta $\overline{BC}$ mas corta $\overline{AC}$; se corta $\overline{BC}$ ela não corta $\overline{AB}$ mas corta $\overline{AC}$; e, se corta $\overline{AC}$, corta $\overline{AB}$ ou $\overline{BC}$ (ou exclusivo).

1. Construa, no *Tabulæ*, os elementos necessários para acompanhar o raciocínio acima. Explore o caráter dinâmico do programa: uma construção é suficiente para verificar as três possibilidades, basta mover a reta ou os pontos do segmento convenientemente.

Passemos agora à demonstração propriamente dita. Seja ℓ uma reta do plano π. Começaremos mostrando que é possível particionar o conjunto $\pi - \ell$ em dois subconjuntos, K_1 e K_2, que verificam as condições enunciadas no (PSP).

Para tanto, seja A um ponto de $\pi - \ell$ e definamos K_1 mediante as seguintes condições: a_1) A pertence a K_1; b_1) um ponto X, distinto de A, pertence a K_1 se, e somente se, $\overline{AX} \cap \ell = \phi$ (onde ϕ denota *conjunto vazio*). Definamos agora o conjunto K_2 pela condição: a_2) um ponto Y de $\pi - \ell$, distinto de A, pertence a K_2 se, e somente se, $\overline{AY} \cap \ell \neq \phi$.

2. Abra uma nova seção no *Tabulæ* e construa todos os elementos que apareceram nas definições acima: a reta ℓ, os pontos A, X e Y, os segmentos $\overline{AX}$ e $\overline{AY}$, e as possíveis interseções desses segmentos com a reta ℓ. Rotule, com a caixa de texto, as regiões correspondentes aos subconjuntos K_1 e K_2.

É óbvio que K_1 é não vazio, pois o ponto A é um elemento de K_1. Para mostrar que $K_2 \neq \phi$, tomemos um ponto P em ℓ, e consideremos a semi-reta oposta àquela de origem P e que passa por A. Seja Y é um ponto dessa semi-reta, distinto de sua origem P. Então, $\overline{AY} \cap \ell = \{P\}$, pois A e Y são pontos de semi-retas opostas, de origem P. Logo, $Y \in K_2$ e portanto, K_2 é não vazio.

3. Prossiga com a construção iniciada no item 2, acrescentando o ponto P e as semi-retas nas condições acima, e convença-se que $K_2 \neq \phi$.

Seja X um ponto de $\pi - \ell$, $X \neq A$. Naturalmente, $\overline{AX} \cap \ell = \phi$ ou $\overline{AX} \cap \ell \neq \phi$, e então, X pertence a K_1 ou X pertence a K_2. Portanto, $K_1 \cup K_2 = \pi - \ell$. Suponhamos que pudesse existir um ponto X de $\pi - \ell$, $X \neq A$, tal que $X \in K_1 \cap K_2$. Isso implicaria que $\overline{AX} \cap \ell = \phi$ e $\overline{AX} \cap \ell \neq \phi$, o que é absurdo. E como A está apenas em K_1, pode-se concluir que $K_1 \cap K_2 = \phi$.

4. Reveja o enunciado do (PSP) e convença-se de que, com o desenvolvimento acima, mostramos que os conjuntos K_1 e K_2 particionam $\pi - \ell$ em dois conjuntos disjuntos.

Vamos provar que K_1 é um conjunto convexo. Sejam X e Z dois pontos distintos de K_1. Se $X = A$, então, por b$_1$), $\overline{XZ} \cap \ell = \overline{AZ} \cap \ell = \phi$. O mesmo ocorre se $Z = A$: $\overline{XZ} \cap \ell = \overline{XA} \cap \ell = \phi$. Agora, se $X \neq A$ e $Z \neq A$, então $\overline{AX} \cap \ell = \phi$ e $\overline{AZ} \cap \ell = \phi$. Pelo (PP), válido mesmo no caso em que X, Z e A sejam colineares, conforme provado no início de nossa argumentação, como ℓ não corta $\overline{AX}$ nem $\overline{AZ}$, também não pode cortar $\overline{XZ}$. Logo, $\overline{XZ} \cap \ell = \phi$. Portanto, K_1 é um conjunto convexo.

A convexidade de K_2 segue de modo análogo: sejam $Y \neq A$ e $W \neq A$ dois pontos distintos de K_2. Por a$_2$), $\overline{AY} \cap \ell \neq \phi$ e $\overline{AW} \cap \ell \neq \phi$. Pelo (PP), ainda que A, Y e W sejam colineares, como ℓ corta $\overline{AY}$ e $\overline{AW}$, então ℓ não pode cortar $\overline{YW}$. Em outras palavras, $\overline{YW} \cap \ell = \phi$ e, portanto, K_2 é um conjunto convexo.

5. Retome sua construção do item 3 e complete-a para acompanhar o raciocínio da prova da convexidade dos conjuntos K_1 e K_2, desenvolvida acima. Procure perceber as diferenças desta prova em comparação à sua demonstração para o item ii.(b), da *preparação*.

Podemos agora passar ao aspecto central da tese. Tomemos dois pontos B e C em $\pi - \ell$ e consideremos os casos:

C$_1$) $B \in K_1$ e $C \in K_1$. Se $B = A$, então $\overline{BC} \cap \ell = \overline{AC} \cap \ell = \phi$ pois $C \in K_1$. Analogamente se procede para $C = A$. No caso $B \neq A$ e $C \neq A$, então $\overline{AB} \cap \ell = \phi$ e $\overline{AC} \cap \ell = \phi$. Mas então, pelo (PP), $\overline{BC} \cap \ell = \phi$. De fato, ℓ não pode cortar apenas um dos segmentos determinados pelos pontos A, B e C. Cabe lembrar que, mesmo no caso de A, B e C serem colineares, mostramos que a conclusão do *Postulado de Pasch* é válida.

C$_2$) $B \in K_1$ e $C \in K_2$ (ou vice-versa). Então, se $B = A$, temos $\overline{BC} \cap \ell = \overline{AC} \cap \ell \neq \phi$ (pois $C \in K_2$). Se $B \neq A$, temos $\overline{AB} \cap \ell = \phi$ e $\overline{AC} \cap \ell \neq \phi$. Cortando $\overline{AC}$ e não cortando $\overline{AB}$, a reta ℓ corta necessariamente $\overline{BC}$, devido ao (PP) e à proposição análoga ao (PP) quando os pontos são colineares. Logo, $\overline{BC} \cap \ell \neq \phi$.

C$_3$) $B \in K_2$ e $C \in K_2$. Então $\overline{AB} \cap \ell \neq \phi$ e $\overline{AC} \cap \ell \neq \phi$. Como, por (PP) e pela proposição análoga ao (PP) quando os pontos são colineares, a reta ℓ não pode cortar mais do que dois segmentos determinados por *A*, *B* e *C*, segue que $\overline{BC} \cap \ell = \phi$.

Concluímos, portanto, a prova da implicação (PP) $\rightarrow$ (PSP).

6. Prosseguindo com a sua construção no *Tabulæ*, complete-a para acompanhar a finalização da prova acima. Observe que o dinamismo do programa permite que os casos C$_1$), C$_2$) e C$_3$) sejam analisados a partir da mesma construção.

Para entregar

I. Existem diferenças entre um *postulado* e um *teorema*? Explique.

II. Na prova da convexidade dos conjuntos K_1 e K_2, desenvolvida *no laboratório*, a argumentação é essencialmente diferente da que você deve ter usado no item ii.(b) da *preparação*. Comente sobre estas diferenças.

III. Mostre que o *Postulado de Pasch* implica no resultado a seguir:

> **Resultado:** Dado um triângulo *ABC*, e uma reta ℓ no mesmo plano do triângulo, se ℓ não contém nenhum vértice do triângulo, então ℓ não pode intersecionar todos os três lados desse triângulo.

Referências

[1] I. Fetissov, *A demonstração em geometria* (trad. Hygino H. Domingues). São Paulo: Atual, 1994. Coleção Matemática: Aprendendo e Ensinando.

[2] E. E. Moise, *Elementary Geometry from an advanced standpoint*. 2nd edition. New York: Addison Wesley, 1974.

[3] E. Q. F. Rezende & M. L. B. Queiroz, *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. Campinas, SP: Editora da Unicamp; São Paulo: Imprensa Oficial, 2000.