

GEOMETRIA PLANA E DESENHO GEOMÉTRICO

Primeiro semestre de 2003
Profa. Sandra Augusta Santos

MA520Z
Sala IM111

Atividade 12

Elementos de geometria hiperbólica com o *Tabulæ*

Introdução e objetivos

Com base em resultados envolvendo retas e circunferências, tangência e um tipo especial de transformação plana, a *inversão*, apresentamos nesta atividade alguns elementos que permitem visualizar resultados da geometria hiperbólica no modelo do *semi-plano de Poincaré*, explorando as facilidades do programa *Tabulæ* para as construções correspondentes.

Palavras-chave: semi-plano; semi-reta; semi-circunferência; tangência; ângulos; inversão em relação a uma circunferência; postulado das paralelas; geometria hiperbólica; modelo do semi-plano de Poincaré.

Preparação

- i. Estude o texto do **Anexo I**, preparado com base na ref. [2] (p.171-177). Leia-o cuidadosamente, com papel e lápis nas mãos, acompanhando as definições, construções e demonstrações.
- ii. Reveja os axiomas e postulados de Euclides na nota histórica da ref. [3] (p.52).
- iii. Leia o texto do **Anexo II** e planeje as construções das paralelas limite e paralelas com perpendicular comum lá ilustradas. Reproduza as Figuras **9(b)**, **9(c)**¹ e **14** usando régua e compasso, apresentando as construções auxiliares. **Faça seus desenhos em folha separada, para serem entregues na aula do dia 28 de maio.**

No laboratório

1. Inversões com o *Tabulæ*:

- Defina um segmento para referência, de comprimento r , e um ponto O ;
- Usando ‘**Círculo por centro e segmento**’ na opção ‘**Construir**’ da caixa de ferramentas, crie uma circunferência $C(O,r)$;
- Tome pontos A e B no interior de $C(O,r)$;
- Construa a reta \overleftrightarrow{AB} e os pontos P, Q , interseções entre $C(O,r)$ e \overleftrightarrow{AB} ;
- Com o ponto A e a circunferência $C(O,r)$ selecionados, na opção ‘**Transformar**’ da caixa de ferramentas, selecione ‘**Inversão**’, e obtenha o ponto imagem A' ;
- Faça o mesmo para o ponto B , obtendo o inverso B' ;

¹ Use uma inversão conveniente como ferramenta para reduzir o traçado de 9(c) ao caso mais fácil 9(b), e depois use novamente a inversão para encontrar a solução desejada.

- Selecione A' , B' e O crie um ‘Círculo por três pontos’ com a opção ‘Construir’ da caixa de ferramentas;
- Explore o dinamismo da sua construção e observe os efeitos da inversão sobre os elementos criados: mova o ponto A , a reta \overleftrightarrow{AB} , a circunferência por A' , B' e O , e verifique, experimentalmente, as quatro propriedades da inversão, enunciadas no **Anexo I**. Para verificar a propriedade (d), crie uma outra circunferência por três pontos, inverta estes três pontos e construa a curva imagem via inversão, criando a circunferência pelos três pontos inversos.
- Construa os segmentos \overline{OA} , $\overline{OA'}$, \overline{OB} , $\overline{OB'}$, meça-os e calcule $OA' \cdot OA$, $OB' \cdot OB$ e r^2 , lembrando que r é o raio da circunferência de inversão. O que você observa?

2. Infinitas paralelas com o *Tabulæ*:

- Trace uma H-reta r do tipo (i), tome um ponto P fora de r e construa as paralelas limite a r passando por P . Idem para uma H-reta s do tipo (ii).
- Nas duas construções que acabou de fazer, acrescente uma paralela com perpendicular comum e use o dinamismo do *Tabulæ* para ‘visualizar as infinitas possibilidades’.
- Construa agora duas H-retas *paralelas com perpendicular comum*, e trace esta perpendicular comum. Comece pela situação mais simples, em que uma das H-retas é do tipo (i). Para duas H-retas paralelas do tipo (ii), use a inversão para reduzir seu problema ao caso anterior. Explícite o ângulo entre as retas por meio das tangentes às curvas, e valide a sua construção.

Algo mais! O site <http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid> contém um programa (*applet* em Java) para *geometria hiperbólica dinâmica*. É necessário ter uma versão mais recente do *Netscape* para conseguir executá-lo. Apesar de requerer algum domínio da língua inglesa para ser explorado, este material proporciona um ambiente bem completo para adquirir mais prática e familiaridade com os intrigantes aspectos da geometria hiperbólica. Uma outra maneira de ampliar seu repertório sobre as geometrias não-euclidianas é lendo o texto de divulgação da ref. [1].

Para entregar

Escreva uma carta para o seu tio Barsanulfo (o irmão da tia Belarmina...), deixando-o a par de suas ‘façanhas e aventuras’ com as infinitas paralelas da geometria hiperbólica! Conte sobre as novidades que esta atividade lhe proporcionou, explicitando suas descobertas e dúvidas com relação à inversão e as construções solicitadas. Não se esqueça de mencionar ao menos dois resultados que valem apenas na geometria hiperbólica, bem como dois resultados comuns às geometrias hiperbólica e euclidiana.

Referências

- [1] S. I. R. Costa & S. A. Santos, Geometrias não-Euclidianas. *Ciência Hoje* vol. 11, no. 65, pp.14-23, 1990 (disponível no xerox do CAMECC para cópia).
- [2] R. Courant & H. Robbins, *O que é Matemática ? uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000. (Tradução de A. S. Brito, para o original ‘*What is mathematics?*’ de 1941).
- [3] E. Q. F. Rezende & M. L. B. Queiroz, *Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas*. Campinas, SP: Editora da Unicamp; São Paulo: Imprensa Oficial, 2000.
- [4] A. S. Smogorzhevski, *Lobachevskian geometry*. Moscow: Mir, 1982.

Anexo I: Transformações geométricas planas e a inversão

Observações gerais

Transformações geométricas do plano em si mesmo associam a cada ponto P do plano um outro ponto P' , denominado *imagem* de P sob a transformação; o ponto P é chamado *antecedente* de P' .

A *reflexão* do plano em uma reta l dada, ilustrada na Fig. 1, é um exemplo de transformação plana. A reta l atua como um espelho: um ponto P de um lado de l tem como imagem o ponto P' , do outro lado de l , e tal que l bissecciona perpendicularmente o segmento $\overline{PP'}$. Uma transformação pode deixar fixos certos pontos do plano. No caso da reflexão, isto ocorre para os pontos da reta l .

Outros exemplos de transformações planas são as *rotações* do plano em torno de um ponto fixo O , as *translações* paralelas, que deslocam cada ponto uma distância d em uma determinada direção (esta transformação não tem pontos fixos) e, de forma mais geral, os movimentos rígidos do plano, que podem ser imaginados como compostos por rotações e translações paralelas.

A classe particular de transformações que nos interessa agora é a das *inversões* com respeito a uma circunferência. Estas são algumas vezes conhecidas como reflexões circulares, porque, com uma certa aproximação, o ponto antecedente e sua imagem podem ser relacionados pelo reflexo em um espelho circular.

Em um plano fixo, seja C uma circunferência dada, com raio r e centro O , chamado centro de inversão. A imagem de um ponto P é definida como sendo o ponto P' contido na semi-reta \overrightarrow{OP} , e tal que

$$OP \cdot OP' = r^2. \quad (1)$$

Diz-se que os pontos P e P' são *pontos inversos com respeito a C* (ver Fig.2). A partir desta definição decorre que, se P' é o ponto inverso de P , então P é o inverso de P' . Uma inversão permuta as partes interna e externa da circunferência C , uma vez que para $OP < r$ temos $OP' > r$, e para $OP > r$ temos $OP' < r$. Os únicos pontos do plano que permanecem fixos sob a inversão são os pontos sobre a própria circunferência C .

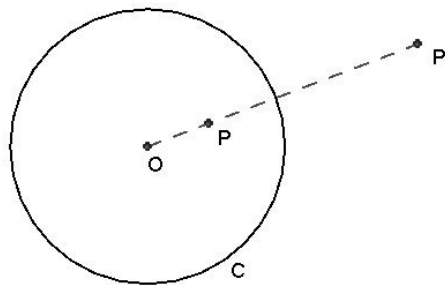
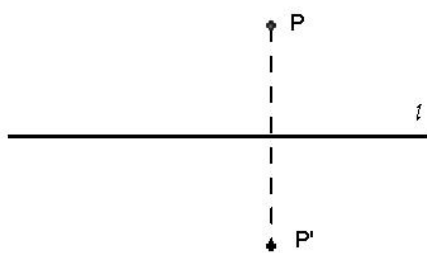


Figura 1: Reflexão de um ponto em uma reta **Figura 2:** Inversão de um ponto em uma circunferência

A regra (1) não define uma imagem para o centro O . Fica claro que se um ponto móvel P aproxima-se de O , a imagem P' se afastará cada vez mais de O . Por esta razão, dizemos que o ponto O corresponde ao *ponto no infinito* sob a inversão. A utilidade desta terminologia reside no fato de que ela nos possibilita afirmar que a inversão estabelece uma correspondência entre os pontos do plano e suas imagens, que é uma correspondência bijetora sem exceção: cada ponto do plano tem uma, e somente uma, imagem e é ele

próprio a imagem de um, e somente um, ponto. Esta propriedade é compartilhada por todas as transformações anteriormente consideradas.

Propriedades da inversão

A propriedade mais importante de uma inversão é a de que ela transforma retas e círculos em retas e círculos. Mais precisamente, vamos demonstrar que após uma inversão:

- (a) Uma reta que passa por O torna-se uma reta que passa por O .
- (b) Uma reta que não passa por O torna-se uma circunferência que passa por O .
- (c) Uma circunferência que passa por O torna-se uma reta que não passa por O .
- (d) Uma circunferência que não passa por O torna-se uma circunferência que não passa por O .

A afirmação (a) é óbvia, uma vez que, com base na definição de inversão, qualquer ponto sobre a reta tem como imagem um outro ponto sobre a mesma reta, de modo que, embora os pontos sobre a reta tenham suas posições permutadas, a reta como um todo é transformada nela mesma.

Para provar a afirmação (b), trace uma perpendicular de O até a reta l (Fig.3). Seja A o ponto onde esta perpendicular encontra l , e seja A' o ponto inverso de A . Marque qualquer ponto P sobre l , e seja P' seu ponto inverso. Uma vez que $OA' \cdot OA = OP' \cdot OP = r^2$, segue-se que

$$\frac{OA'}{OP'} = \frac{OP}{OA}.$$

Portanto, os triângulos $OP'A'$ e OAP são semelhantes e o ângulo $OP'A'$ é um ângulo reto. Como consequência dos resultados da geometria elementar, segue-se que P' está contido na circunferência K com diâmetro OA' , de modo que o inverso de l é esta circunferência. E isto prova (b). A afirmação (c) segue-se agora a partir do fato de que como o inverso de l é K , o inverso de K é l .

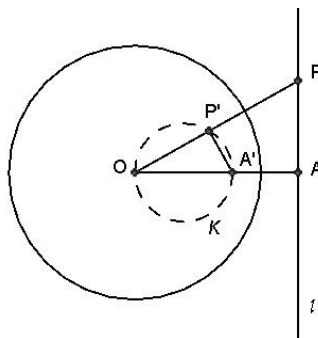


Figura 3: Inversão de uma reta l em uma circunferência

Falta apenas provar a afirmação (d). Seja K uma circunferência qualquer que não passe por O , com centro em M e raio k . Para obter sua imagem, traçamos uma reta por O cortando K em A e B , e em seguida determinamos como as imagens A' , B' variam quando a reta passando por O corta K de todas as maneiras possíveis (Fig.4). Representemos as distâncias AO , OB , AO' , OB' , OM por a , b , a' , b' , m , e seja t o comprimento de uma tangente a K a partir de O . Temos $aa' = bb' = r^2$, por definição de inversão, e $ab = t^2$ por uma propriedade geométrica elementar da circunferência. Se dividirmos as primeiras relações pela segunda, obteremos

$$\frac{a'}{b} = \frac{b'}{a} = \frac{r^2}{t^2} = c^2,$$

onde c^2 é uma constante que depende somente de r e t , e é a mesma para todas as posições de A e B . Por A' traçamos uma reta paralela a \overline{BM} encontrando \overline{OM} em Q . Seja $OQ = q$ e $A'Q = \rho$. Então, $q/m = a'/b = \rho/k$, ou

$$q = \frac{ma'}{b} = mc^2 \quad \text{e} \quad \rho = \frac{ka'}{b} = kc^2.$$

Isto significa que, para todas as posições de A e B , o ponto Q será sempre o mesmo sobre \overline{OM} , e a distância $A'Q$ terá sempre o mesmo valor. Analogamente, $B'Q = \rho$, uma vez que $a'/b = b'/a$. Assim, as imagens de todos os pontos A, B sobre K são pontos cuja distância a Q é sempre ρ , ou seja, a imagem de K é uma circunferência. Isto prova (d).

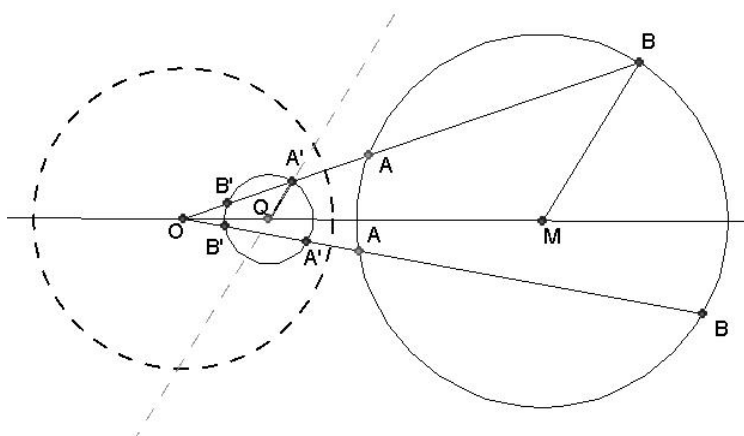


Figura 4: Inversão de uma circunferência

Construção geométrica de pontos inversos

Neste item vamos demonstrar o seguinte resultado: **O ponto P' , inverso de um ponto P dado, com respeito a uma circunferência C de raio r , pode ser construído usando-se apenas régua e compasso.**

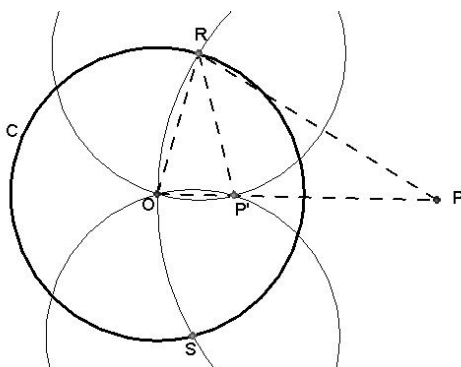


Figura 5: Inversão de um ponto exterior à circunferência

Consideremos inicialmente o caso em que o ponto P seja exterior a C . Com OP como raio e P como centro, descrevemos um arco cruzando C nos pontos R e S . Com estes dois pontos como centros, descrevemos arcos com raio r que se cortem em O e em um ponto P' sobre a reta OP . Nos triângulos isósceles ORP e ORP' , temos as congruências $\angle ORP \cong \angle POR \cong \angle OP'R$, de modo que estes triângulos são semelhantes, e portanto $OP/OR = OR/OP'$, isto é, $OP \cdot OP' = r^2$. Desta forma, P' é o inverso requerido de P , que deveria ser construído.

Agora, se o ponto P dado estiver no interior de C , a mesma construção e prova serão válidas, desde que a circunferência de raio OP com centro em P intercepte C em dois pontos. Caso contrário, podemos reduzir a construção do ponto inverso P' ao caso anterior por meio do seguinte artifício:

Primeiro, observamos que, com o compasso apenas, podemos encontrar um ponto B sobre a reta passando por dois pontos dados A , O e tal que $AO = OB$. Para fazer isto, traçamos uma circunferência em torno de O com raio $r = AO$, e marcamos sobre esta circunferência, começando de A , os pontos P , Q e B de tal forma que $AP = PQ = QB = r$ (Fig.6). De fato, B é o ponto desejado, pois os triângulos AOP , OPQ e OQB são equiláteros, de modo que AO e OB estão em semi-retas opostas de origem O e $OB = OQ = AO$. Repetindo este procedimento, podemos facilmente prolongar \overline{AO} qualquer número de vezes desejado. A propósito, como o comprimento de \overline{AQ} é $r\sqrt{3}$ (verifique!), construímos ao mesmo tempo $\sqrt{3}$ a partir da unidade, sem o emprego da régua...

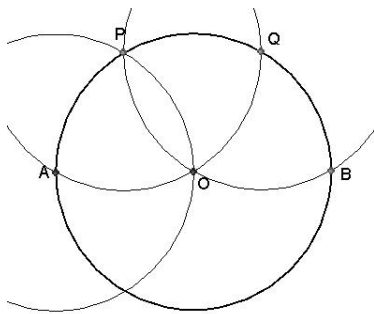


Figura 6: Duplicação de um segmento.

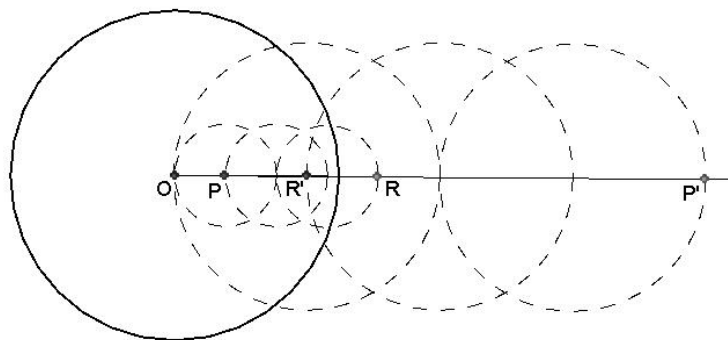


Figura 7: Inversão de um ponto interior em uma circunferência.

Podemos agora encontrar o inverso de qualquer ponto P no interior da circunferência C . Primeiro, encontramos um ponto R sobre a semi-reta \overrightarrow{OP} cuja distância a O seja um múltiplo inteiro de OP e que esteja no exterior de C : $OR = n \cdot OP$, com n inteiro (Fig.7). É possível fazer isto medindo sucessivamente a distância OP com o compasso até que se vá para a região exterior a C . Encontraremos agora o ponto R' inverso a R pela construção anteriormente dada. Então

$$r^2 = OR' \cdot OR = OR' \cdot (n \cdot OP) = (n \cdot OR') \cdot OP.$$

Portanto, o ponto P' para o qual $OP' = n \cdot OR'$ é o inverso desejado.

Anexo II: Um modelo para a geometria hiperbólica

Introdução

O emprego de modelos para se investigar a geometria hiperbólica foi proposto pela primeira vez pelo matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900), em uma obra editada em 1868. Com a teoria da geometria diferencial como suporte, Beltrami trabalhou com superfícies de curvatura constante negativa. Ele mostrou que as geodésicas dessas superfícies podem ser interpretadas como retas, obtendo uma geometria com infinitas paralelas a uma reta dada, passando por um ponto não pertencente a ela. Os modelos do disco e do semi-plano, do cientista francês Henri Poincaré (1854-1912), foram por ele utilizados para descobrir novos teoremas sobre funções de uma variável complexa.

Os modelos revelaram-se importantes na constatação da impossibilidade de demonstração do postulado das paralelas de Euclides. Como nos modelos são satisfeitos todos os postulados euclidianos, exceto o das paralelas, se este pudesse ser logicamente deduzido dos demais, também deveria ser verdadeiro, o que não é o caso, como veremos a seguir.

O semi-plano de Poincaré

Seja π um plano euclidiano, dividido em dois semi-planos τ e τ' mediante a reta u . Trabalharemos com o semi-plano τ aberto, cuja fronteira é u , denominado *semi-plano de Poincaré*. Os pontos que consideraremos são os mesmos da geometria euclidiana, e as retas são determinadas a partir de uma nova noção de distância. Os ângulos no semi-plano de Poincaré são medidos da maneira euclidiana usual.

Resumimos no que segue algumas definições e fatos, cujas provas omitimos por simplicidade, mas que podem ser encontradas, por exemplo, na ref. [4].

Movimentos hiperbólicos são movimentos dos pontos do semi-plano τ de modo que o comprimento hiperbólico de qualquer arco pertencente a este semi-plano seja igual ao comprimento hiperbólico do mesmo arco em sua nova posição. São movimentos hiperbólicos básicos:

1. Translação do semi-plano τ de uma distância fixa na direção paralela à reta u .
2. Transformação de simetria² em relação a um eixo perpendicular à reta u .
3. Transformação de semelhança³ com centro de semelhança na reta u e com razão de semelhança positiva.
4. Inversão em relação a uma circunferência de raio qualquer, centrada em u .

Movimentos hiperbólicos são transformações *conformes*, isto é, preservam ângulos. A composição de movimentos hiperbólicos também é um movimento hiperbólico.

Para evitar ambigüidade e simplificar nossa apresentação, distinguiremos argumentos euclidianos por E e hiperbólicos por H. Por exemplo, H-reta significa a reta hiperbólica no semi-plano τ e E-circunferência significa a circunferência euclidiana neste mesmo semi-plano.

Proposição

- (i) São H-retas as E-semi-retas com origem em u , e perpendiculares a u .
- (ii) Uma E-semi-circunferência contida em τ , com centro em u também é uma H-reta.
- (iii) Não existem outras H-retas.

² Veja mais sobre transformações de simetria, ou *isometrias*, na ref. [3], capítulo 13.

³ Transformações de semelhança, ou *homotetias*, são abordadas na ref. [3], capítulo 14.

Retas paralelas

Vamos precisar das seguintes definições:

Pontos infinitamente distantes são os pontos da reta u ou o ponto infinito do semi-plano τ . Duas H-retas contidas em τ são **paralelas** se não se interceptam, podendo ser de dois tipos: **paralelas limite** e **paralelas com perpendicular comum**.

Paralelas limite são duas H-retas que têm em comum um ponto infinitamente distante.

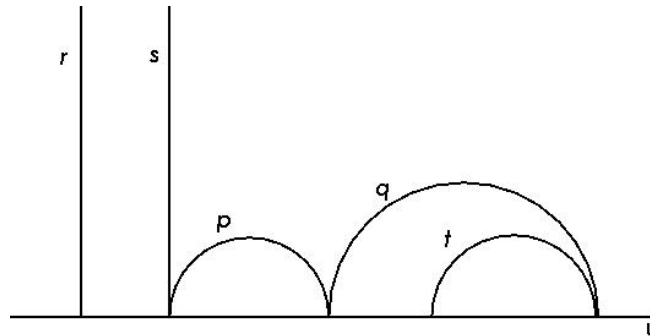


Figura 8: Os pares (r, s) , (s, p) , (p, q) e (q, t) ilustram os possíveis casos de paralelas limite.

Paralelas com perpendicular comum são aquelas que não tem em comum um ponto infinitamente distante e admitem uma única perpendicular em comum.

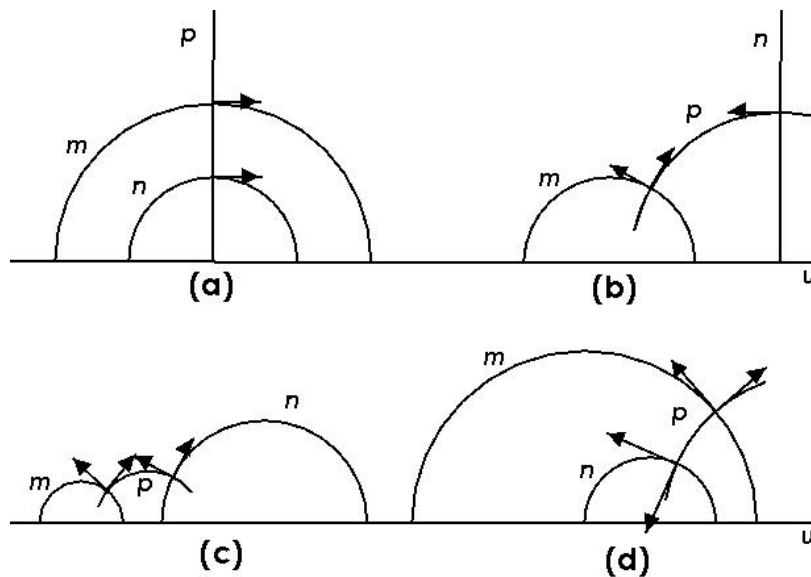


Figura 9: As H-retas m e n são paralelas, com perpendicular comum p .

Dada uma H-reta r e um ponto P fora dela, existem infinitas H-retas paralelas a r , passando por P , com perpendicular comum, e exatamente duas paralelas limite, que não tem perpendicular comum com a H-reta r dada.

As próximas figuras nos permitem visualizar estas paralelas em diferentes casos:

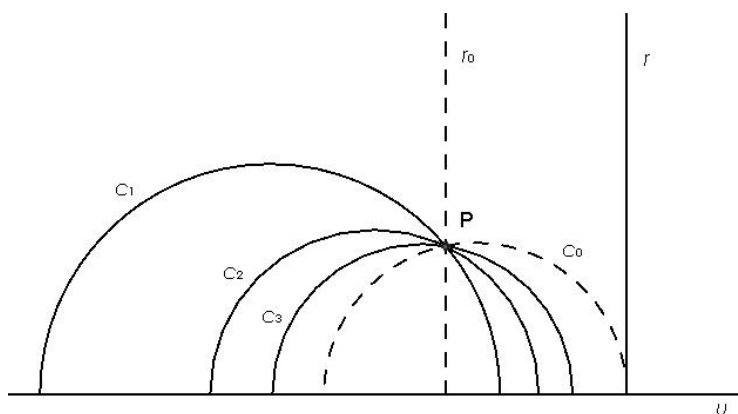


Figura 10: As H-retas r_0 e c_0 (tracejadas) são as paralelas limite a r passando por P .
As H-retas c_1, c_2 e c_3 são exemplares de paralelas a r passando por P , com perpendicular comum.

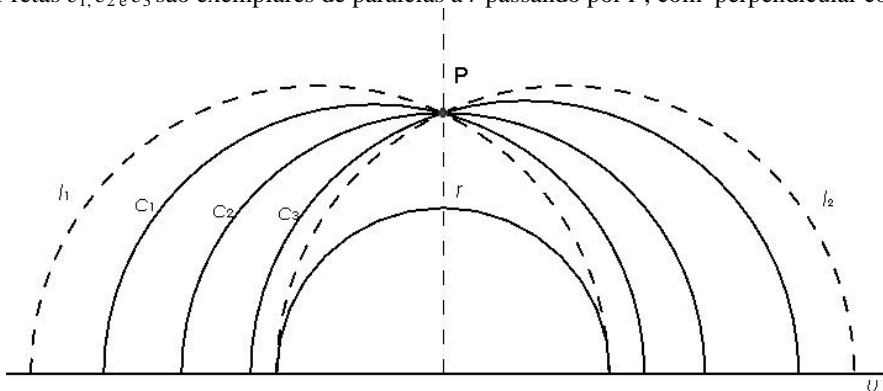


Figura 11: As H-retas l_1 e l_2 (tracejadas) são as paralelas limite a r passando por P .
As H-retas c_1, c_2 e c_3 são exemplares de paralelas a r passando por P , com perpendicular comum.

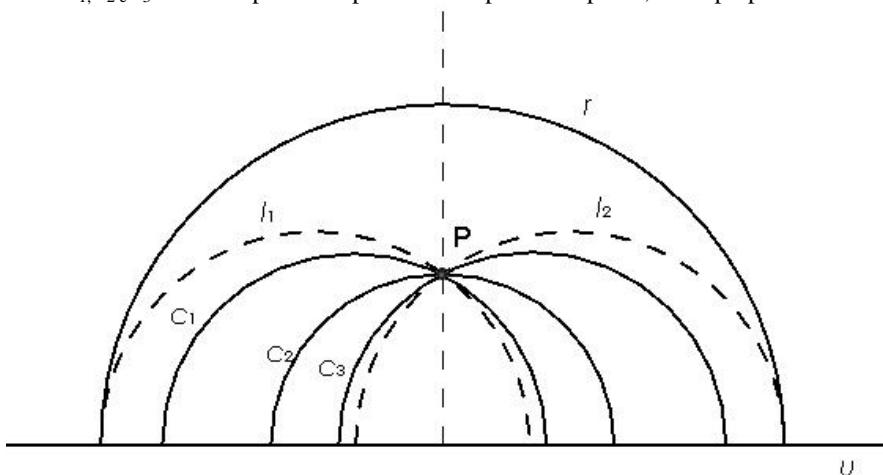


Figura 12: As H-retas l_1 e l_2 (tracejadas) são as paralelas limite a r passando por P .
As H-retas c_1, c_2 e c_3 são exemplares de paralelas a r passando por P , com perpendicular comum.

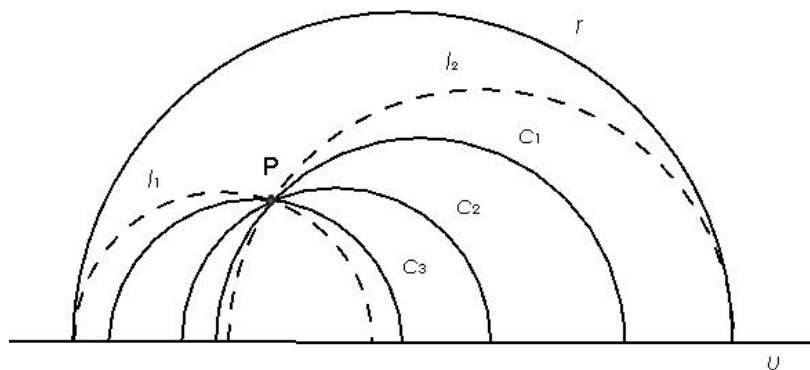


Figura 13: As H-retas l_1 e l_2 (tracejadas) são as paralelas limite a r passando por P .
As H-retas c_1, c_2 e c_3 são exemplares de paralelas a r passando por P , com perpendicular comum.

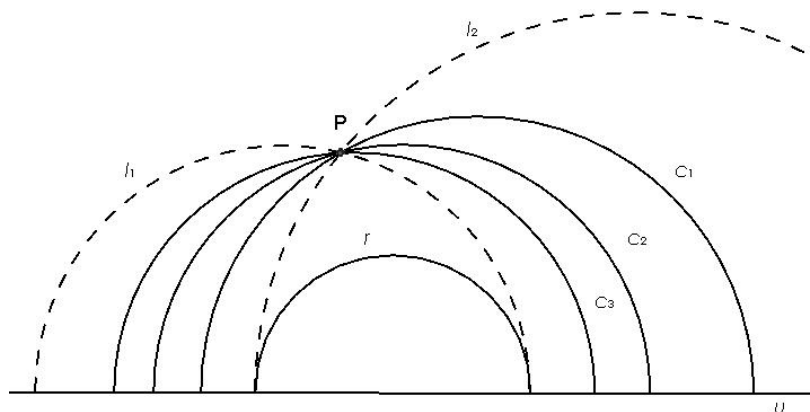


Figura 14: As H-retas l_1 e l_2 (tracejadas) são as paralelas limite a r passando por P .
As H-retas c_1, c_2 e c_3 são exemplares de paralelas a r passando por P , com perpendicular comum.

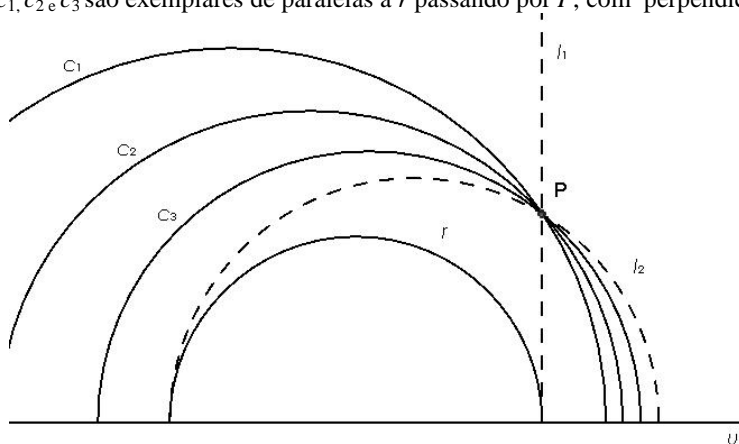


Figura 15: As H-retas l_1 e l_2 (tracejadas) são as paralelas limite a r passando por P .
As H-retas c_1, c_2 e c_3 são exemplares de paralelas a r passando por P , com perpendicular comum.