Laboratório Computacional

MS139 1o.sem.2001

Professoras responsáveis:

Margarida Mello e Sandra Santos

DMA - IMECC - UNICAMP

Projeto

Ordem de Contato

Discussão do pré-projeto: 11/Maio

Data de entrega: 08/Junho

Este projeto constitui uma oportunidade não só de consolidar conhecimentos recentemente adquiridos mas também de incorporar novos conhecimentos e, principalmente, de dar asas à sua criatividade.

O conceito de ordem de contato é introduzido e trabalhado por meio de uma série de exercícios de resultados previsíveis. Esta etapa tem por objetivo que você se familiarize com este conceito, utilizando para tanto as ferramentas do Cálculo e do *software*. Aplicações importantes deste conceito (polinômios de Taylor e splines) são apresentadas para ilustrar seu alcance.

Este estudo deve prepará-lo para as partes mais ricas do projeto: a pesquisa do item 25 e o exercício de criação do item 26. Além de propiciar um espaço para o exercício de sua iniciativa, independência e criatividade, os dois últimos ítens permitem por em prática o que você aprendeu no decorrer do projeto.

Instruções Gerais

- Os projetos serão desenvolvidos individualmente ou em grupos de dois alunos, em horário extra-classe. Vocês poderão utilizar os laboratórios de suas unidades em horários livres e contar com os atendimentos dos auxiliares didáticos e tutores para tirar dúvidas e receber as necessárias orientações.
- A apresentação do seu trabalho deverá seguir os padrões de um trabalho científico: Introdução, Desenvolvimento, Conclusões, Tabelas e Figuras com legendas, Referências, etc.

Definição e significado

Dizemos que as funções $f(x)$ e $g(x)$ têm *ordem de contato* m em $x = a$ se $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$, $f''(a) = g''(a)$, $\ldots$, $f^{(m)}(a) = g^{(m)}(a)$.
Em outras palavras, as funções e suas m primeiras derivadas coincidem em $x = a$. Para ter uma idéia do que isto significa,

1. (a) Faça os gráficos de $f(x) = \cos(2x)$ e $g(x) = \sqrt{1-4x^2}$ no intervalo $[-.5, .5]$.
   (b) Descreva o que você vê.
   (c) Calcule as derivadas de f e g em $a = 0$, de ordem 0 até ordem 4.
   (d) Qual a ordem de contato de f e g em 0?
2. Repita os ítens 1 (a)–(d) para $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$ e $g(x) = (60 + 60x + 3x^2 - 7x^3)/(60 + 3x^2)$, no intervalo $[-3, 3]$ e $a = 0$.
3. Repita os ítens 1 (a)–(d) para $f(x) = \cos \pi x$ e $g(x) = -1 + (\pi^2/2)(x-1)^2$, no intervalo $[0, 2]$ e $a = 1$.

Polinômios com ordem de contato pré-estabelecida

4. (a) Encontre valores para a_0, a_1, a_2, a_3, e a_4 de forma que o polinômio, de grau menor

ou igual a 4, $g(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tenha a maior ordem de contato possível com $f(x) = e^x$ em $x = 0$.

(b) Faça os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ em $[-2, 2]$.

(c) Descreva o que você vê.

5. Repita os ítens 4 (a)–(c) para $f(x) = \operatorname{sen} x$. Utilize o intervalo $[-\pi, \pi]$ para os gráficos.

6. Repita os ítens 4 (a)–(c) para $f(x) = \cos x$. Utilize o intervalo $[-\pi, \pi]$ para os gráficos.

7. Repita os ítens 4 (a)–(c) para $f(x) = 1/(1-x)$. Utilize o intervalo $[-.9, .9]$ para os gráficos.

Polinômios de Taylor

Um polinômio que tem ordem de contato m com uma função $f(x)$ em $x = a$ é chamado de *polinômio de Taylor de f em a, de grau menor do que ou igual a m.* Os polinômios calculados nos ítens 4–7 são precisamente os polinômios de Taylor das respectivas funções em zero, com grau menor do que ou igual a 4.

8. Deduza, na base do "lápis e papel" (isto é, sem utilizar o *Mathematica*), a fórmula geral do polinômio de Taylor de grau menor do que ou igual a m de uma função $f(x)$ genérica em $x = 0$.

   Dica: monte o sistema de equações que o polinômio deve satisfazer e obtenha fórmulas para seus coeficientes.

9. Repita o item anterior, produzindo agora o polinômio de Taylor de grau menor do que ou igual a m de uma função $f(x)$ genérica em $x = a$.

   Dica: adote um procedimento análogo ao do item anterior, porém expresse seu polinômio em potências de $(x - a)$, ao invés de potências de x.

10. Felizmente o *Mathematica* já tem pré-definido um comando para calcular polinômios de Taylor. Veja o exemplo:

```
Clear[f,x]; f[x_] = 1/(2+x);
Normal[Series[f[x],{x,0,4}]]
```

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^4}{32}$$

   Adapte os comandos acima para obter os polinômios de graus 3, 6, e 9, em zero, da função $g(x) = e^x \operatorname{sen}(3x)$.

11. Visualize os gráficos de $g(x)$ e dos polinômios calculados no item anterior simultaneamente, no intervalo $[-1, 1]$. Descreva o que você vê.

12. Lembrando que $\operatorname{tg}(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$, temos que $6 \operatorname{arctg}(1/\sqrt{3}) = \pi$. Construa polinômios de Taylor de $f(x) = 6 \operatorname{arctg}(x)$, em zero, para vários graus. Avalie estes polinômios em $x = 1/\sqrt{3}$ para obter estimativas da constante π. Compare com o valor fornecido pelo *Mathematica*, com o comando **`N[Pi]`**, e estabeleça uma relação entre a precisão de sua estimativa e o grau do polinômio utilizado.

Mudança de variável

Abaixo investigamos o efeito da mudança de variável na ordem de contato de duas funções.

13. Sejam $f(x) = e^x$ e $g(x) = 1 + x + x^2/2$. Qual a ordem de contato de $f(x)$ e $g(x)$, em $x = 0$?

14. Sejam $f(x) = e^x$ e $g(x) = 1 + x + x^2/2$. Qual a ordem de contato de $f(x^2)$ e $g(x^2)$, em $x = 0$?

15. Sejam $f(x) = e^x$ e $g(x) = 1+x+x^2/2$. Qual a ordem de contato de $f(x^3)$ e $g(x^3)$, em $x = 0$?

16. Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções quaisquer com ordem de contato m em $x = 0$, qual a ordem de contato de $f(x^2)$ e $g(x^2)$ em $x = 0$? Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ têm derivadas de todas as ordens.

17. Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções quaisquer com ordem de contato m em $x = 0$, qual a ordem de contato de $f(x^3)$ e $g(x^3)$ em $x = 0$? Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ têm derivadas de todas as ordens.

18. Baseado nos ítens 16 e 17, qual seria sua conjectura para a ordem de contato de $f(x^p)$ e $g(x^p)$ em $x = 0$, se as funções $f(x)$ e $g(x)$ têm ordem de contato m em $x = 0$?

Planejando um trecho de estrada

Uma inundação destruiu o trecho de uma estrada na faixa com coordenadas (x, y) satisfazendo $0 \leq x \leq 2a$. Sabe-se que o trecho diretamente a esquerda do destruído é retilíneo, coincidindo com a reta $y = 0$. O trecho diretamente à direita é curvo, coincidindo com o gráfico da função $g(x) = (a/b)\cos(x - c) + 1.5a$. Sua tarefa é planejar uma trajetória para o trecho que foi destruído. Tomando $a = d_3 + 1$, $b = d_2$ e $c = d_1 + 1$, onde d_1, d_2 e d_3 são os dígitos da unidade, dezena e centena, respectivamente, de um R.A. da dupla, faça os ítens a seguir.

19. Calcule a expressão da função $f(x)$ que satisfaz as condições:

    (i) O trecho planejado deve coincidir com o gráfico de um polinômio $f(x)$ de grau menor do que ou igual a três, para $0 \leq x \leq 2a$.

    (ii) A ordem de contato do polinômio com a reta $y = 0$, em $x = 0$, deve ser 1.

    (iii) A ordem de contato do polinômio com a curva $y = g(x)$, em $x = 2a$, deve ser 1.

    Justifique seus cálculos.

20. Faça o gráfico do trecho planejado juntamente com os existentes. Descreva o que você vê.

21. Refaça os ítens 19 e 20 supondo agora que sejam exigidas junções com grau de contato 2. Adapte o que for necessário.

O fator político no planejamento ...

Escolha um valor α tal que $\alpha \neq f(a)$, onde $f(x)$ é a função calculada no item 19. O manda-chuva local é um poderoso senador e a entrada de sua fazenda está próxima do ponto $P(a, \alpha)$. Como você preza seu emprego, você vai rever o planejamento do trecho a ser reconstruído de modo que ele passe por P. Para simplificar as contas, utilize dois polinômios, $f_1(x)$ e $f_2(x)$, para os trechos $0 \leq x \leq a$ e $a \leq x \leq 2a$. Preocupações quanto à segurança para o trânsito impõem que a ordem de contato no ponto P seja 2. Recapitulando, seu novo planejamento para o trecho deve contemplar:

(I) ordem de contato 1 em $x = 0$;

(II) ordem de contato 2 em $x = a$;

(III) ordem de contato 1 em $x = 2a$;

(IV) deve passar por (a, α).

22. Quais os graus mínimos que você deve admitir para os polinômios f_1 e f_2, de modo que o problema tenha uma solução assegurada?

23. Calcule expressões para os polinômios f_1 e f_2 que satisfaçam o novo conjunto de exigências.

24. Faça o gráfico do novo trecho, incluindo as vizinhanças pré-existentes à esquerda e à direita de cada extremo, e indicando a localização do ponto P. Descreva o que você vê.

Surpresa!!

Você acabou de calcular uma **spline cúbica** (se tudo deu certo ...).

25. Faça uma pesquisa sobre splines e suas aplicações, em arte, em computação gráfica, em *design* industrial, etc. Ao reportar sobre sua pesquisa em fontes que não têm o enfoque matemático, acrescente aos seus achados este enfoque, utilizando o seu trabalho nos ítens anteriores. Por outro lado, quando discorrer sobre um texto consultado, de pendor matemático, procure extrair os aspectos qualitativos dos fatos, resultados, ou procedimentos apresentados no texto, baseando-se também no que você aprendeu com os ítens anteriores.

26. Inspirado pelo problema da estrada e por aspecto(s) abordado(s) em sua pesquisa, **crie** e **resolva** um problema cuja solução envolva os conceitos de ordem de contato e spline.

Referências

Para a elaboração deste projeto nos baseamos em:

B. Davis, H. Porta, J. Uhl, *Calculus & Mathematica – Approximations: Measuring Nearness*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1994.

Vale à pena consultá-lo na biblioteca do IMECC ao fazer o projeto.

Material adicional sobre splines pode ser encontrado nas referências a seguir.

B.A. Barsky, *Computer Graphics and Geometric Modeling using Beta-Splines*, Springer-Verlag, 1988.

R.H. Bartels, J.C. Beatty, & B.A. Barsky, *An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling*, Morgan Kaufmann, 1987.

J.D. Foley, A. van Dam, S.K. Feiner & J.F. Hughes, *Computer Graphics: Principles and Practice – Second Edition in C*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1996.

W.F. Taylor, *The Geometry of Computer Graphics*, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove, California, 1992.

Para uma exposição teórica e exemplos sobre o polinômio de Taylor veja, por exemplo,

G.S.S. Ávila, *Cálculo 2: funções de uma variável*, Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1982.

C.H. Edwards, Jr. & David E. Penney, *Cálculo com Geometria Analítica*, vol. II, Prentice-Hall do Brasil Ltda., 1997.

L. Leithold, *O Cálculo com Geometria Analítica*, vol. II, Ed. Harbra, 3 ed., 1994.

J. Stewart, *Cálculo, volume II*, 4. ed., São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

Boas referências introdutórias sobre o *Mathematica* são os livros

M.L. Abell & J.P. Braselton, *Mathematica by Example*, 2ed., Academic Press, Cambridge, Massachusetts, 1993.

N. Blachman, *Mathematica, Uma Abordagem Prática*, LTC, 1995.

Não se esqueça de pesquisar também na Internet!!

Bom trabalho!