

#### 4ª Lista de Exercícios de MA-720A

Análise no  $\mathbb{R}^n$   
20/maio/2003

1. Demonstre o Lema de Morse: Se  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação diferenciável de classe  $C^k$ , com  $k \geq 3$ ,  $a \in U$  um ponto crítico não degenerado, então existe um difeomorfismo (mudança de coordenadas)  $\varphi$  tal que em uma vizinhança de  $a$ ,  $f \circ \varphi(x_1, \dots, x_n) - f(a) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_n^2$ .
2. A partir das formas locais de imersão e submersão, enuncie e demonstre o teorema do posto.
3. Mostre que se  $f : M \rightarrow N$  é um difeomorfismo e  $M$  é orientável então  $N$  também é orientável.
4. Seja  $M$  uma superfície não-orientável. Prove que existem duas vizinhanças parametrizadas conexas,  $U, V \subset M$  tais que  $U \cap V$  tem pelo menos duas componentes conexas, numa das quais a mudança de coordenadas tem determinante de jacobiano positivo enquanto na outra esse determinante é negativo.
5. Sejam  $M, N \subset \mathbb{R}^9$  respectivamente os conjuntos das matrizes  $3 \times 3$  de postos 1 e 2 respectivamente. Mostre que  $M$  e  $N$  são subvariedades  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^9$  com  $\dim M = 5$ ,  $\dim N = 8$ , ambas orientáveis.
6. Seja  $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$  (chamado de um 3-simplexo). Mostre que  $\text{vol}(T) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_0^{1-x-z} dy = 1/6$ .
7. Seja  $V_m(r)$  o volume da bola de centro na origem e raio  $r$  em  $\mathbb{R}^m$ . Prove que se tem a relação indutiva:  $V_{n+1}(r) = 2V_n(1) \int_0^r (r^2 - t^2)^{n/2} dt$  e conclua daí que  $V_m(r) = \frac{r^m \pi^{m-2}}{(m/2)!}$  quando  $m$  é par e  $V_m(r) = r^m \pi^{(m-1)/2} 2^{(m+1)/2} / (m+1)!$  se  $m$  é ímpar. Observe que dessas fórmulas resulta um fato curioso:  $\lim_{m \rightarrow \infty} V_m(r) = 0$ .
8. Calcule explicitamente e mostre que as projeções estereográficas em  $S^2$  formam um sistema de coordenadas (i.e. parametrizações ou cartas locais). Generalize para  $S^k$ . A aplicação  $i : S^k \rightarrow S^k$  dada por  $i(x) = -x$  preserva orientação?