

### 3ª Lista de Exercícios de MA-720A

#### Análise no $\mathbb{R}^n$

16/abril/2003

1. Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  harmônica no aberto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , isto é  $f \in C^2$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$  em todos os pontos de  $U$ . Suponha que os pontos críticos de  $f$  são todos não-degenerados. Mostre que  $f$  não possui máximos nem mínimos locais.
2. Sejam  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes diferenciável num aberto conexo  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Prove que se  $f(a) = g(a)$ ,  $f'(a) = g'(a)$  e  $f''(x) = g''(x)$  para todo  $x \in U$  então  $f = g$ .
3. Seja  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ , com  $f(x, 0) = f(0, y) = 0$  para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ . Mostre que existe  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  tal que  $f(x, y) = g(x, y) \cdot x \cdot y$  para quaisquer  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
4. (Unicidade da fórmula de Taylor) Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação  $k$  vezes diferenciável. Sejam  $\phi_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  transformações  $j$ -lineares e simétricas tais que

$$f(a + h) = f(a) + \phi_1(h) + \phi_2(h, h) + \dots + \phi_k(h^{(k)}) + r_k(h),$$

onde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|^k} = 0.$$

Então  $\phi_j = \frac{f^{(j)}}{j!}$ .

5. Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes diferenciável no aberto  $U$ . Dado  $z_0 \in U$ , um ponto crítico de  $f$ , ponha  $a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_0)$ ,  $b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(z_0)$  e  $c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(z_0)$ . Exprima, em termos de  $a, b$  e  $c$  a condição para que  $z_0$  seja não degenerado. Admitindo-a satisfeita, obtenha condições adicionais para que  $z_0$  seja um máximo, um mínimo ou um ponto de sela.
6. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  tal que  $|f'(t)| \leq k < 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Defina uma aplicação  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  pondo  $\varphi(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$ . Mostre que  $\varphi$  é um difeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  sobre si mesmo.

7. Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciável no conjunto convexo  $U \subset \mathbb{R}^m$ . Se  $\langle f'(x) \cdot v, v \rangle > 0$  para  $x \in U$  e  $0 \neq v \in \mathbb{R}^m$  quaisquer então  $f$  é injetiva. Se  $f \in C^1$  então  $f$  é um difeomorfismo de  $U$  sobre um subconjunto de  $\mathbb{R}^m$ . Dê um exemplo em que  $U = \mathbb{R}^m$  mas  $f$  não é sobrejetiva.
8. Seja  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^1$  tal que para todo  $x \in \mathbb{R}^m$  temos que  $f'(x)$  é uma isometria (isto é,  $\|f'(x) \cdot v\| = \|v\|$ ) na norma euclidiana. Então  $f$  é uma isometria (isto é,  $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ ). Conclua que existem uma transformação linear  $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $a \in \mathbb{R}^m$  tais que  $f(x) = T(x) + a$ .
9. Verifique que toda imersão é um homeomorfismo sobre sua imagem. E toda submersão é uma aplicação aberta, *i.e.* imagem de aberto é aberto.
10. Dê exemplos, em  $\mathbb{R}^2$ , de uma aplicação  $C^\infty$  aberta que não é uma submersão e de uma aplicação  $C^\infty$  injetiva que não é uma imersão.
11. Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é de classe  $C^1$  e tem posto 3 em todos os pontos do aberto  $U \subset \mathbb{R}^4$  então  $|f(x)|$  não assume valor máximo para  $x \in U$ .
12. Se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  é uma submersão de classe  $C^k$ , ( $k \geq 1$ ), definida no aberto  $U \subset \mathbb{R}^{m+p}$ , e  $g : f(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é tal que  $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^k$  então  $g$  é de classe  $C^k$ .