2^a Lista de Exercícios de MA-720A

Análise no $\mathbb{R}^n$

20/março/2003

1. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto convexo. Dada $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável, considere as seguintes afirmações:

   a) $\|f'(x)\| \leq c$ para todo $x \in U$;

   b) $\|f(x) - f(y)\| \leq c\,\|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in U$;

   c) f é uniformemente contínua;

   d) para todo $x_0 \in \overline{U}$, existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$;

   e) se U é limitado então $f(U)$ é limitado.

   Mostre que $(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e)$.

2. Seja $f : U \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ uma função que possui todas as derivadas direcionais $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ num ponto $a \in U$, $U \subset \mathbf{R}^m$ aberto. Se não existirem pelo menos $m-1$ vetores v, linearmente independentes, tais que $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$, então f não é diferenciável no ponto a.

3. Dada uma transformação linear $A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, defina as funções $f : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ e $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ pondo $f(x, y) \doteq < A \cdot x, y >$ e $g(x) = < A \cdot x, A \cdot x >$. Determine grad $f(x, y)$ e grad $g(x)$.

4. Seja $f : U \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ uma função diferenciável no aberto U. Se para algum $b \in \mathbf{R}^n$, o conjunto $f^{-1}(b)$ possui um ponto de acumulação $a \in U$ então $f'(a) = \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ não é injetiva.

5. Seja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ uma função diferenciável, com $f(0) = 0$. Se a transformação linear $f'(0)$ não tem autovalor 1 então existe uma vizinhança V de 0 em $\mathbf{R}^m$ tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in V - \{0\}$.

6. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ diferenciável no aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^m$. A fim de que seja $\|f(x)\| =$ constante, é necessário e suficiente que $f'(x) \cdot h$ seja perpendicular a $f(x)$, para todo $x \in U$ e todo $h \in \mathbb{R}^m$.

7. (fácil, mas importante no contexto de variedades) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável em $a \in U$. Mostre que na definição de derivada direcional $\partial f/\partial v\,(a)$ não precisa ser tomada exclusivamente a direção da reta parametrizada passando por $a \in U$ e com velocidade v, como se define usualmente; pode ser tomada em relação a qualquer curva diferenciável γ passando por a no tempo $t = 0$ com velocidade $\gamma'(0) = v.$, i.e.
$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\bigg|_{t=0}$$

8. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto convexo e $A : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ uma aplicação diferenciável. A fim de que exista $f : U \to \mathbb{R}^n$ duas vezes diferenciável, tal que $f'(x) = A(x)$ para todo $x \in U$, é necessário e suficiente que $< A'(x)v, w >=< A'(x)w, v >$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^m$.

9. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ Lipschitziana no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, com $a \in U$, e $g : V \to \mathbb{R}^p$ diferenciável no aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $f(U) \subset V$ e $b = f(a)$. Se $g'(b) = 0$ então $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto a, com $(g \circ f)'(a) = 0$. E se f não for de Lipschitz?

10. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ e $g : V \to \mathbb{R}^m$, com $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ com $g(f(x)) = x$ para todo $x \in U$. Se $y = f(x)$, prove que as transformações lineares $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $g'(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ têm o mesmo posto.

11. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^1, com $\varphi(f(x)) = 0$ para todo $x \in U$. Dado $a \in U$, se $\text{grad}\varphi(b) \neq 0$, $b = f(a)$, então $\det f'(a) = 0$.

12. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $|f(x)|$ é constante em U então o determinante do jacobiano de f é identicamente nulo.