3^a Prova de MM-720

Análise no $\mathbb{R}^n$

24 de novembro de 2011

Escolha 5 dentre as 6 questões abaixo. Boa prova!

1. Sejam α e β duas 1-formas em R^3 tais que $\alpha \wedge \beta \neq 0$ em todos pontos de um aberto $U \subset R^3$. Considere uma 2-forma ω tal que $\omega \wedge \alpha = \omega \wedge \beta = 0$ em todos os pontos de U. Mostre que $\omega = f\ \alpha \wedge \beta$ para alguma função diferenciável $f : U \to \mathbf{R}$.

2. Seja ω uma 1-forma num aberto $U \subset R^3$. Mostre que se ω se anula sobre todos os vetores tangentes a uma superfície contida em U, o mesmo ocorre com $d\omega$, i.e. $d\omega(v, w) = 0$ para qualquer par de vetores (v, w) tangentes a essa superfície.

3. Mostre que a 1-forma $\omega = -\frac{y}{x^2+y^2}\ dx + \frac{x}{x^2+y^2}\ dy$ em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ é fechada mas não é exata. Dê um exemplo de uma variedade compacta com bordo com um forma volume exata. Porém, se M for compacta e $\partial M = \emptyset$ então nenhuma forma volume é exata.

4. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Para algum $a \in U$, seja $f'(a)$ um isomorfismo. Mostre que $\lim_{r\to 0} \frac{vol\ f(B[a;r])}{vol\ B[a,r]} = |\det f'(a)|$. Em particular, se $f'(a)$ não for um isomorfismo então o limite é zero.

5. Considere a calota $M = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 1/2\}$ e a 2-forma $\beta = 2xdx \wedge dz + 2zdy \wedge dz$. (a) Obtenha uma forma α tal que $\beta = d\alpha$. (b) exiba uma parametrização de ∂M. (c) Calcule $\int_M \beta$.

6. Dado o retângulo $A = [a_1, b_1] \times \dots [a_n, b_n] \subset \mathbf{R}^n$, com $a_i < b_i$ para todo $i = 1, \dots, n$ e $f : A \to \mathbf{R}$ contínua. Defina $F : A \to \mathbf{R}$ como

$$F(x) = \int_{[a_1,x_1]\times\dots[a_n,x_n]} f.$$

Justifique como pode ser calculada a diferencial dF no interior de A.