2^a Prova de MM-720

Análise no $\mathbb{R}^n$

13 de outubro de 2011

Escolha 5 dentre as 6 questões abaixo. Boa prova!

1. Sejam $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, com $g(t) > 0$ para todo $t \geq 0$ e $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < y\}$. Defina $f : U \to \mathbb{R}^2$ como sendo
$$f(x,y) = \left(\int_0^{x+y} g(t)\ dt, \int_0^{y-x} g(t)\ dt \right).$$
Mostre que f é um difeomorfismo sobre um aberto de $\mathbb{R}^2$.

2. Usando o argumento de multiplicadores de Lagrange, determine os pontos críticos da função $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) =< x, y >$, restrita à esfera unitária $|x|^2 + |y|^2 = 1$.

3. Justifique porque o toro dado pela imagem inversa de 1 da função $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2$ é uma variedade diferenciável orientável de classe C^∞. Identifique o espaço tangente em um ponto genérico (x, y, z) neste toro.

4. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Para cada $r = 0, 1, \ldots, p = \min\{m, n\}$, seja A_r o interior do conjunto de pontos nos quais f tem posto r. Então o aberto $A = A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_p$ é denso em U.

5. Se $f : U \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 e tem posto 3 em todos os pontos do aberto $U \subset \mathbb{R}^4$ então $|f(x)|$ não assume valor máximo em U.

6. a) Demonstre o Teorema da Aplicação Inversa (TAI) a partir do Teorema da Aplicação Implícita. b) Dada $f : U \to \mathbb{R}^n$, U aberto em $\mathbf{R}^m$ com posto constante então f é localmente injetiva se e somente se é imersão. c) Dada $f : U \to \mathbb{R}^n$, U aberto em $\mathbf{R}^m$ com posto constante então f é aplicação aberta se e somente se é submersão.