1^a Prova de MM-720

Análise no $\mathbb{R}^n$

08/setembro/2011

Escolha 5 dentre as 6 questões abaixo. Boa prova!

1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Se todo conjunto homeomorfo a X for fechado então X é compacto.

2. Seja $f : U \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ uma função diferenciável no aberto U. Se para algum $b \in \mathbf{R}^n$, o conjunto $f^{-1}(b)$ possui um ponto de acumulação $a \in U$ então $f'(a) : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ não é injetiva.

3. Determine os conjuntos onde a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida abaixo é contínua e onde ela é diferenciável. Onde for diferenciável, determine a diferencial f'.
$$f(t,x) = \frac{\operatorname{sen}(xt)}{t} \qquad \text{se} \quad t \neq 0,$$
e $f(0,x) = x$.

4. Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável com $\lim_{|x|\to\infty} f'(x) \cdot x = 0$ então a aplicação $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $g(x) = f(2x) - f(x)$ é limitada.

5. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ harmônica no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, isto é, $f \in C^2$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ em todos os pontos de U. Suponha que os pontos críticos de f são todos não-degenerados. Mostre que f não possui máximos nem mínimos locais.

6. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^m$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^1, com $\varphi(f(x)) = 0$ para todo $x \in U$. Dado $a \in U$, se $\operatorname{grad}\varphi(b) \neq 0$, $b = f(a)$, então $\det f'(a) = 0$.