Solução dos Exercícios da P3 MM720 24 Nov 2011

1) 2 maneiras:

A mais interessante: $\alpha \wedge \beta \neq 0 \Rightarrow \alpha$ e β são l.i em $\Lambda^1(\mathcal{U})$.

Seja γ outra 1-forma (pode ser escolhida diferenciável, mas isso não é relevante aqui) t.q. em cada ponto $x \in \mathcal{U}$, $\{\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)\}$ formam uma base de $\Lambda^1(\mathbb{R}^3)$.

Podemos escrever ω em relação à base $\{\alpha\wedge\beta, \alpha\wedge\gamma, \beta\wedge\gamma\}$ em cada ponto $x \in \mathcal{U}$, i.e.

$$\omega = f\,\alpha\wedge\beta + g\,\alpha\wedge\gamma + h\,\beta\wedge\gamma$$

dependendo da escolha de γ podem ser diferenciáveis

$\omega \wedge \alpha = 0 \Rightarrow h = 0$

$\omega \wedge \beta = 0 \Rightarrow g = 0$

$\therefore \boxed{\omega = f\,\alpha\wedge\beta}$ ∎

Outra maneira: Escrevemos

$$\alpha = f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$$

$$\beta = g_1\,dx + g_2\,dy + g_3\,dz$$

$$\omega = h_1\,dx\wedge dy + h_2\,dx\wedge dz + h_3\,dy\wedge dz$$

onde $f_i, g_i, h_i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis $\forall i = 1, 2, 3$.

$$\left.\begin{array}{l} \omega\wedge\alpha = 0 \Rightarrow \quad h_1 f_3 - h_2 f_2 + h_3 f_1 = 0 \\ \omega\wedge\beta = 0 \Rightarrow \quad h_1 g_3 - h_2 g_2 + h_3 g_1 = 0 \end{array}\right\} (*)$$

$$\alpha\wedge\beta = (f_1 g_2 - f_2 g_1)\, dx\wedge dy + (f_1 g_3 - f_3 g_1)\, dx\wedge dz + (f_2 g_3 - f_3 g_2)\, dy\wedge dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hipótese}}}{\neq} 0$$

Sejam a, b e c funções diferenciáveis em $U \subset \mathbb{R}^3$ t.q. (a,b,c), (f_1, f_2, f_3) e (g_1, g_2, g_3) são l.i. Então a equação $(*)$ significa que (h_1, h_2, h_3) deve satisfazer a seguinte equação linear:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ f_3 & -f_2 & f_1 \\ g_3 & -g_2 & g_1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Onde d depende da escolha de a, b e c $(d =. a h_1 + b h_2 + c h_3)$.

Agora, pela regra de Cramer

$$h_1 = \frac{d \cdot \begin{vmatrix} -f_2 & f_1 \\ -g_2 & g_1 \end{vmatrix}}{\det(M)}, \quad h_2 = \frac{d\,(-1) \begin{vmatrix} f_3 & f_1 \\ g_3 & g_1 \end{vmatrix}}{\det(M)}, \quad h_3 = \frac{d \begin{vmatrix} f_3 & -f_2 \\ g_3 & -g_2 \end{vmatrix}}{\det(M)}$$

que são d vezes os coeficientes de $\alpha\wedge\beta$.

Obs: $\alpha\wedge\beta \neq 0 \iff M$ pode ser escolhido com $\det(M) \neq 0$.

2) 2 maneiras:

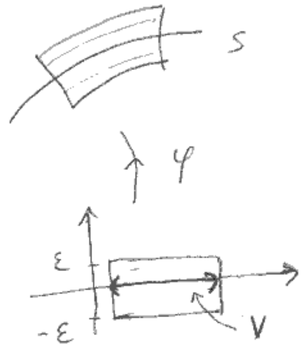
<u>A mais interessante:</u> Usando que a derivada exterior comuta com o pull-back. Seja $i : S \to \mathcal{U}$ a inclusão, e considere $i^*\omega$. Temos por hipótese que $i^*\omega \equiv 0$, portanto $d i^*\omega \equiv 0$ em S.

Mas $d i^*\omega = i^* d\omega$. Portanto, dados $u, v \in T_pS$

$$d i^*\omega(u,v) = i^* d\omega(u,v) = d\omega(i_* u, i_* v) = d\omega(u,v) = 0.$$

<u>Obs:</u> Isso não significa que $d\omega = 0$ em $\mathbb{R}^3$. ∎

<u>Outra maneira:</u> Pelo teorema da aplicação implícita, localmente $\forall p \in S$ existe um difeomorfismo $\varphi : V \subset \mathbb{R}^2 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow Im(\varphi) \subset \mathcal{U}$ t.q. $\varphi(V \times \{0\})$ é uma vizinhança de p em S.



Se $\omega(v) = 0 \quad \forall\, v \in T_xS$ com $x \in S$

então $\varphi^*\omega = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy + f\, dz$

$$\therefore\quad d\varphi^*\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dz + 0 \cdot dx \wedge dy$$

i.e. $d\varphi^*\omega$ é nulo na superfície $V \times \{0\}$

$\Longleftrightarrow$ $d\omega = (\varphi^{-1})^* d\varphi^*\omega$ é nulo em $\varphi(V \times \{0\}) = S$ ∎

3) $\omega = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$ forma ângulo em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$d\omega = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \wedge dx + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy = 0 \quad \therefore \text{ é fechada.}$$

Pela teoria (na verdade: exercício 3 e 5 do §4 Cap. 4 Guillemin & Pollack) a integral de uma 1-forma exata em uma curva fechada é zero. Consideremos a curva $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \omega(\gamma'(s))\,ds = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 s + \cos^2 s)\,ds = 2\pi$$

ou $\displaystyle\int_0^{2\pi} \gamma^*\omega = \int_0^{2\pi} 1\,ds = 2\pi \neq 0 \quad \therefore \ \omega$ não é exata.

Exemplo de variedade compacta com bordo com forma volume exata:

$M = [0,1]$ $\quad dx = df$ onde f é a 0-forma $f(x) = x$.

Porém, se M for compacta e $\partial M = \emptyset$, se $\omega = d\theta$

então $\displaystyle\int_M \omega = \int_{\partial M = \emptyset} \theta = 0 \quad \therefore \ \omega$ não pode ser uma forma volume.

4) Pelo teorema de mudança de variáveis temos que

$$\int_{f(B[a,r])} 1 = \int_{B[a,r]} 1 \; |\det f'(x)| \qquad \forall\, r > 0 \text{ no domínio.}$$

$$\| \\ vol\left(f(B[a,r])\right)$$

Obs: Pelo Teo. Sard a fórmula vale sem precisar que $f'(x)$ seja isomorfismo $\forall\, x \in B[a,r]$

Sejam $m_r = \min\left\{ |\det f'(x)|,\ x \in B[a,r] \right\}$ e

$M_r = \text{MÁX}\left\{ |\det f'(x)|,\ x \in B[a,r] \right\}$

que existem já que $|\det f'(x)|$ é contínuo. Então

$$m_r \operatorname{vol} B[a,r] \leq \operatorname{vol} f(B[a,r]) \leq M_r \operatorname{vol} B[a,r]$$

$$\iff \quad m_r \leq \frac{\operatorname{vol} f(B[a,r])}{\operatorname{vol} B[a,r]} \leq M_r$$

O resultado segue por continuidade de $|\det f'(x)|$ já que $M_r \downarrow f'(a)$ e $m_r \nearrow f'(a)$.

∎

5) $\beta = 2x\, dx \wedge dz + 2z\, dy \wedge dz$

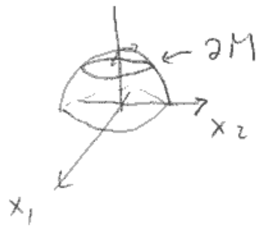
a) Vários opções fáceis: $\alpha = (x^2 + 2zy)\, dz \quad (*)$

$$= -2xz\, dx - z^2\, dy$$

$$= x^2\, dz - z^2\, dy + 1\, dx$$

todos eles cohomólogos, naturalmente.

b)



Orientação em M dada por $\{e_1, e_2\}$ em $(0,0,1)$

∴ orientação em ∂M é anti horária (vista por cima).

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} t,\ \frac{1}{2} \right) \end{aligned}}$$

é uma parametrização e preserva a orientação.

c) Pelo Teo. Stokes $\displaystyle\int_M \beta = \int_{\partial M} \alpha = \int_0^{2\pi} \gamma^* \alpha = \int_0^{2\pi} \alpha(\gamma'(s))\, ds$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\gamma_1(s)^2 + 2\gamma_3(s)\gamma_2(s) \right) \cdot \underbrace{\gamma_3'(s)}_{=0}\, ds = 0$$

opção (*) de α

$\square$

6) Pelo Teo. Fubini

$$F(x) = \int_{a_1}^{x_1} \int_{a_2}^{x_2} \cdots \int_{a_n}^{x_n} f(s_1, \ldots, s_n)\, ds_n \ldots ds_1$$ e independe da ordem de integração.

Assim, para cada $i = 1, \ldots, n$

$$F(x) = \int_{a_i}^{x_i} \left[\int_{a_1}^{x_1} \cdots \widehat{\int_{a_i}^{x_i}} \cdots \int_{a_n}^{x_n} f(s_1, \ldots, \underset{\uparrow}{s_i}, \ldots, s_n)\, ds_n \ldots \widehat{ds_i} \ldots ds_1 \right] ds_i$$

$\therefore$ pelo Teo. F. Cálculo

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_{a_1}^{x_1} \cdots \widehat{\int_{a_i}^{x_i}} \cdots \int_{a_n}^{x_n} f(s_1, \ldots, s_{i-1}, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{atenção!}}}{x_i}, s_{i+1}, \ldots, s_n)\, ds_n \ldots \widehat{ds_i} \ldots ds_1$$

e

$$dF = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$