2ª Prova Análise no $\mathbb{R}^n$

MM-720 13 Out 2011

Soluções.

1) $$f'(x,y) = \begin{pmatrix} g(x+y) & g(x+y) \\ -g(y-x) & +g(y-x) \end{pmatrix}$$ e $\det f'(x,y) = 2\,g(x+y)\,g(y-x) > 0$

já que $y-x>0$.

$\therefore$ f é difeomorfismo local.

Além disso, f é injetora: $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow$

$$\int_0^{x_1+y_1} g(t)\,dt = \int_0^{x_2+y_2} g(t)\,dt \iff x_1+y_1 = x_2+y_2 \quad (1)$$

e

$$\int_0^{y_1-x_1} g(t)\,dt = \int_0^{y_2-x_2} g(t)\,dt \iff y_1-x_1 = y_2-x_2 \quad (2)$$

(1) e (2) $\Rightarrow$ $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Finalmente: $\left\{\begin{array}{l}\text{difeo local}\\ \text{injetora}\end{array}\right. \Rightarrow$ difeo entre U e $f(U)$ ∎

2) É uma versão simplificada do que foi feito em aula.

$\nabla f(x,y) = (y,x)$ e $\nabla\varphi(x,y) = 2(x,y)$ onde $\varphi: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto |x|^2+|y|^2$

Método multiplicador de Lagrange: $\nabla f(x,y) = \lambda\,\nabla\varphi(x,y)$

i.e. $\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \end{cases} \iff x = 4\lambda^2 x \implies \lambda = \pm 1/2$

Pontos críticos: (x, x) com $|x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ptos de máximo)

e $(x, -x)$ com $|x| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ptos de mínimo).

3). Resultado da teoria garante que imagem inversa de valor regular é variedade diferenciável (C^k se f o for). Também da teoria (usando campos normais) sempre será orientável, qualquer que seja a codimensão.

$$f'(x,y,z) = \left(2x - \frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad 2y - \frac{4y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad 2z\right)$$

$\forall (x,y,z)$ com $x, y \neq 0$. $\therefore$ 1 é valor regular.

$$T_{(x,y,z)} = \operatorname{Ker} f'(x,y,z)$$

4) Tome aberto $V \subset U$. Seja $s \in \{0, 1, \dots, m\}$ o maior posto de f' em V. $\exists$ submatriz de Jf, $s \times s$, com $\det \neq 0$. Como f é C^1, o determinante dessa submatriz continua $\neq 0$ em uma vizinhança de pontos onde esse $\det \neq 0$.

$\implies V \cap A_s \neq \emptyset$ para algum $s \in \{0, 1, \dots, m\}$.

(Ver Teorema 7, §12 Cap. V Curso de Análise, Vol. II Elon L. Lima)

5) Várias maneiras:

1 f é submersão $\Longrightarrow$ é aplicação aberta $\Longrightarrow$ $f(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^3$ é aberto

$\uparrow$

Corolário da F.L. Submersão

e nesse aberto $\nexists$ valor máximo da norma.

2 Máximo de $|f(x)|$ $\Longleftrightarrow$ Máximo de $|f(x)|^2$.

Tome $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad x \longmapsto |x|^2$

$(g \circ f)' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$. Como $f'(x)$ é sobrejetora, $\forall x \in \mathcal{U}$

$\exists$ direção v t.q. $f'(x)v = \nabla g(f(x))$ $\therefore$ a partir de $x \in \mathcal{U}$,

$v \in T_x\mathcal{U}$ é direção de crescimento da norma $|f(x)|$.

6) a) (Visto em aula) Use $F: \mathcal{U} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e tome $F^{-1}(0)$.
$\qquad (x, y) \longmapsto f(x) - y$

(b) e (c) (Visto em aula) São os corolários vistos na teoria

imediatamente depois de teorema do posto.