Soluções.

1) $Id: X \to X$ é um homeomorfismo $\Rightarrow$ $X$ é fechado. Considere o homeomorfismo
$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow B(0,1)$$
$$x \longmapsto \frac{x}{1+|x|}$$
então $\varphi\big|_X : X \to \varphi(X)$

também é um homeomorfismo. $\varphi(X)$ é fechado e limitado $\Rightarrow$

$\varphi(X)$ é compacto $\Rightarrow$ $X$ é compacto.

2) Seja $a_n \in f^{-1}(b)$ com $a_n \to a$. Por continuidade $f(a) = b$.

Seja $v_n = a_n - a$ e $\hat{v}_n = \dfrac{a_n - a}{|a_n - a|} \in S^{n-1}$.

$$\underset{b}{\underset{\shortparallel}{f(a+v_n)}} = \underset{b}{\underset{\shortparallel}{f(a)}} + f'(a)\, v_n + r(v_n)$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \dfrac{r(v_n)}{|v_n|} = \lim f'(a)\,\hat{v}_n = 0$. Por compacidade, $\exists$ subseq.

$v_{n_k} \to w \in S^{n-1}$ t.q. $f'(a)\, w = 0$.

3) Por ser quociente de funções $C^\infty$, $f$ é $C^\infty$ no aberto onde $t \neq 0$

com $f'(t,x) = \begin{pmatrix} \dfrac{xt\cos(xt) - \operatorname{sen}(xt)}{t^2} & \cos(xt) \end{pmatrix}$.

Precisa estudar a diferenciabilidade / continuidade na reta $(0,x)$: ②

Temos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(0,x) = 0 & \text{(use regra de L'Hospital)} \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,x) = 1 \end{cases}$$

2 maneiras de concluir:

1) Mostra que $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ são contínuos em $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ é $C^1$ em $\mathbb{R}^2$;

2) Mostra que $[0 \;\; 1]$ é a diferencial da $f$ em $(0,x)$.

Faremos aqui só a (2):

$$f(t, x+h) = f(0,x) + [0 \;\; 1]\begin{pmatrix} t \\ h \end{pmatrix} + r(t,h)$$

Precisa verificar que $\displaystyle\lim_{(t,h)\to(0,0)} \frac{r(t,h)}{|t|+|h|} = 0$ (escolha da norma $|\cdot|_1$ é para facilitar)

OK se $t=0$ porque $f(0,x+h) = x+h$

Se $t \neq 0$

$$r(t,h) = \frac{\operatorname{sen}(t(x+h))}{t} - (x+h)$$

Assim

$$\lim_{(t,h)\to(0,0)} \frac{r(t,h)}{|t|+|h|} = \lim_{(t,h)\to(0,0)} \underbrace{\frac{t}{|t|+|h|}}_{\substack{\text{ltdo} \\ \in[-1,1]}} \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(t(x+h)) - t(x+h)}{t^2}\right)}_{\substack{\downarrow \text{ por L'Hospital em } t \text{ e} \\ 0 \quad x\in[-S,S] \text{ compacto}}} = 0$$

■

4) Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, considere a curva $\gamma_x : [0,1] \to \mathbb{R}^m$

$$\theta \longmapsto f(x+\theta x)$$

Então $\gamma_x$ é diferenciável e $\gamma_x' = \dfrac{\partial f}{\partial \theta}(x+\theta x) = f'(x+\theta x)\cdot x$

Temos $g(x) = \gamma_x(1) - \gamma_x(0) \leqslant \sup\limits_{\theta\in[0,1]} \left\{ |\gamma_x'| \right\} \cdot 1$

$$= \sup \left\{ |f'(x+\theta x)\cdot x| ; \ \theta \in [0,1] \right\}$$

$$= \sup \left\{ \frac{1}{1+\theta} \ |f'(x+\theta x)\circ(1+\theta)x| ; \ \theta \in [0,1] \right\} < \varepsilon$$

se $x$ for suficientemente grande.

$\therefore$ $g$ é contínua e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0 \implies g$ é ltda ▩

5) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = -\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ se $a$ é um ponto crítico.

$\therefore$ $Hf(a) = \begin{pmatrix} p & q \\ q & -p \end{pmatrix}$ e os autovalores são $\begin{cases} \lambda_1 = \sqrt{p^2+q^2} > 0 \\ \lambda_2 = -\sqrt{p^2+q^2} < 0 \end{cases}$

$\therefore$ não é definida.

6) $\gamma \circ f(x) = 0 \overset{\uparrow}{\implies} \gamma'(b)\, f'(a) = 0 \iff (f'(a))^T \underset{\neq 0}{\nabla\gamma(b)} = 0$

regra da cadeia

$\iff (f'(a))^T$ degenerada $\iff \det f'(a) = 0$ ▩

③ Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t,x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(tx)/t & \text{se } t \neq 0, \\ x & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Considere a funçaõ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(s) = \begin{cases} \operatorname{sen}(s)/s & \text{se } s \neq 0, \\ 1 & \text{se } s = 1. \end{cases}$$

Entaõ é simples verificar que para qualquer $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$f(t,x) = g(tx) \cdot x .$$

De fato, se $tx \neq 0$ entaõ $t \neq 0$ e temos

$$f(t,x) = \frac{\operatorname{sen}(tx)}{t} = \frac{\operatorname{sen}(tx)}{tx} \cdot x = g(tx) \cdot x .$$

Se $tx = 0$, entaõ temos dois casos. Se $t = 0$, entaõ

$$f(t,x) = x = 1 \cdot x = g(tx) \cdot x .$$

Quando $t \neq 0$, devemos ter $x = 0$ e entaõ

$$f(t,x) = \operatorname{sen}(tx)/t = \operatorname{sen}(0)/t = 0 = 1 \cdot x = g(tx) \cdot x .$$

Assim, para todos $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, temos $f(t,x) = g(tx) \cdot x$.

Mostrarei que $g$ é de classe $C^1$. Temos que se $s \neq 0$,

$$g'(s) = \frac{\cos(s) \cdot s - \operatorname{sen}(s)}{s^2} .$$

Além disso,

L'Hospital 2 vezes

$$g'(0) = \lim_{s \to 0} \frac{g(s) - 1}{s} = \lim_{s \to 0} \frac{\operatorname{sen}(s) - s}{s^2} = 0$$

Agora note que

$$\lim_{s \to 0} g'(s) = g'(0)$$

e portanto $g$ é $C^1$. Assim, $f$ é composiçaõ de funções $C^1$