3a. Lista de Exercícios

MA-693 Medida e Probabilidade

1. (Pré-integração estocástica) Mostre que se $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um $\mathcal{F}_n$-martingale (discreto) e $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um processo (também discreto) limitado e $\mathcal{F}_{n-1}$-adaptado então o processo definido indutivamente por $Y_0 = X_0$ e
$$Y_n = X_0 + \sum_{j=1}^{n} H_j(X_j - X_{j-1})$$
é um $\mathcal{F}_n$-martingale. Em particular, se T é um tempo de parada (discreto) então o processo $X^T = X_{n\wedge T}$ é um martingale.

2. Enuncie a desigualdade de Doob, compare com a desigualdade de Chebychev. Use a desigualdade de Doob para mostrar que se $S_t = \sup_{s\leq t} B_s$ onde B_t é um movimento browniano, então para todo $a > 0$ temos:
$$\mathbb{P}\{S_t \geq at\} \leq \exp -\frac{a^2 t}{2}.$$

3. (Para as próximas 3 questões, ver e.g., as 4 primeiras paginas de D. Nualart, "The Malliavin Calculus and Related Topics") Defina os polinômios de Hermite H_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Mostre que se X e Y são variáveis gaussianas centradas tais que (X, Y) são também gaussianas em $\mathbb{R}^2$, com $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2] = 1$. Então
$$\mathbb{E}[H_n(X)H_m(Y)] = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad n \neq m; \\ \frac{1}{n!}(\mathbb{E}[XY])^n & \text{se} \quad n = m. \end{cases}$$

4. Sejam H um espaço de Hilbert separável e $W : H \to L^2(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $W(\cdot)$ é uma isometria com imagem em variável aleatória gaussiana (como no 1o. exercício da 2a. lista). Mostre que as variáveis aleatórias $\{e^{W(h)}, h \in H\}$ formam um subconjunto total em $L^2(\Omega, \mathcal{F})$ (i.e. a projeção desse subconjunto em qualquer subespaço de dimensão finita é diferente do vetor nulo.

5. Assumindo os dois itens anteriores, demonstre o teorema da decomposição em caos de Wiener:
$$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n;$$
onde $\mathcal{H}_n$ são os subespaços gerados pelos polinômios de Hermite H_n aplicados nas gaussianas $W(h)$.