# 2a. Lista de Exercícios

MA-693 Medida e Probabilidade

1. Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. Dado um espaço de Hilbert separável $H$, mostre que existe uma isometria $X : H \to L^2(\Omega)$ tal que $X(h)$ é uma variável aleatória gaussiana. Note que neste caso, $X$ pode ser visto como um processo estocástico indexado no espaço $H$.

2. A partir da questão anterior, mostre que existe um processo estocástico $(B_t)$ que tem incrementos gaussianos $(B_t - B_s) \sim N(0, t-s)$ para $t > s$ e independentes. Conclua, usando o Critério de Kolmogorov que existe um processo contínuo satisfazendo as condições sobre os incrementos acima (i.e. existe movimento Browniano).

3. Construa o movimento browniano a partir das probabilidades de transição, isto é, como um processo de Markov. Defina essas probabilidades de transição, medida inicial, probabilidade nos cilindros de dimensão finita, condição de consistência. Conclua, usando o Critério de Kolmogorov que existe um processo contínuo satisfazendo as condicões sobre os incrementos como na questão acima (i.e. existe movimento Browniano).

4. Verifique que se $T$ for um tempo de parada em relação à uma filtração $\mathcal{F}_t$ então $\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \bigcap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ para todo } t \geq 0\}$ é uma $\sigma$–álgebra.

5. Defina processo progressivamente mensurável. Verifique que se um processo $(X)_t$ for progressivamente mensurável então a variável aleatória $X_T$ é $\mathcal{F}_T$ mensurável.

6. Use uma das versões do teorema de "parada opcional" para mostrar que se $(X)_t$ for um processo $\mathcal{F}_t$-adaptado e contínuo então $X$ é martingale se e somente se para todo tempo de parada limitado $T$, $X_T \in L^1$ e $\mathcal{E}[X_T] = \mathcal{E}[X_0]$. Conclua que se $X$ for um martingale então o processo parado $(X^T)_t = X_{T \wedge t}$ também é um martingale.

7. Defina variação quadrática de um processo estocástico. Mostre que a variação quadrática do movimento browniano é dado pelo processo deterministico.

8. Mostre que se um martingale tem variação limitada então ele é um processo constante quase sempre.