1a. Lista de Exercícios

MA-693 Medida e Probabilidade
abril de 2002

1. Dadas as σ–álgebras $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ em Ω, verifique que a esperança condicional $\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{A}]$ é a projeção ortogonal de $L^2(\Omega, \mathcal{F})$ em $L^2(\Omega, \mathcal{A})$. Conclua que esse operador é auto-adjunto.

2. Defina variável aleatória e medida gaussiana $N(C^{-1}, m)$ em $\mathcal{R}^n$. Dada uma medida de probabilidade μ em um espaço de Banach B, defina a transformada de Fourier $\widehat{\mu}$. Verifique que se μ é uma medida $N(C^{-1}, m)$ em $\mathcal{R}^n$ então sua transformada de Fourier é dada por

$$\widehat{\mu}(\xi) = \exp\left(i < \xi, m > - \frac{< C^{-1}\xi, \xi >}{2} \right).$$

3. Mostre que soma de variáveis aleatórias gaussianas independentes é gaussiana.

4. Mostre que dada uma aplicação contínua $f : K \to K$ com K um espaço topológico compacto, então existe pelo menos uma medida de probabilidade μ que é invariante pela ação de f, i.e. $f_* m = m$.

5. Descreva como se faz a aplicação do teorema ergódico de Birkhoff para se calcular os expoentes de Lyapunov de uma aplicação diferenciável $f : [0, 1] \to [0, 1]$ (use o item anterior, antes de tudo!).

6. Exercícios do Folland (escolha 5 dentre os seguintes): Capítulo 8: 58 e 59. Capítulo 9: 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16–22.

7. (Questão filosófica) Critique e questione o modelo de probabilidade de Kolmogorov: Por que uma noção "boa"de "probabilidade"tem que ficar restrito a uma σ–álgebra sendo que estas só admitem uniões enumeráveis? Existiria "probabilidade"sobre subconjuntos quaisquer? Reveja um exemplo de conjunto $E \subset \mathbb{R}$ que não é Lebesgue-mensurável. Todos os conjuntos não mensuráveis da reta são construídos através do axioma da escolha? (para ser respondida ao longo do curso).