5a. Lista de Exercícios

MA-604 Topologia dos Espaços Métricos

(MM-204 Introdução à Topologia)

1. Defina espaço métrico completo. Mostre que os seguintes conjuntos não são completos:

   a) $(a, b]$;

   b) $\mathbb{C} - \{i\}$;

   c) O conjunto de sequências $C = \{(a_i)_{i \in N} : a_k \neq 0$ para uma quantidade finita de $k\}$, com a métrica do supremo.

2. Mostre que os seguintes conjuntos são completos:

   a) $\{1, 2\}$;

   b) $\{(x, y) \in R^2 : x^2 - y^2 \leq 1\}$;

   c) as componentes conexas de un espaço métrico completo.

3. Defina função uniformemente contínua. Mostre que a imagem de uma sequência de Cauchy por uma função uniformemente contínua também é uma sequência de Cauchy.

4. Enuncie o teorema do ponto fixo de Banach (atenção com as hipóteses!). Considere a aplicação afim que leva o retângulo de vértices $\{(0, 0), (2, 0), (2, 1), (0, 1)\}$ no subconjunto dado pelo retângulo com vértices $\{(1/2, 0), (1, 0), (1, 1/4), (1/2, 1/4)\}$, nesta ordem. Mostre que existe um ponto fixo nesta aplicação (porquê?). Verifique que este ponto fixo tem a mesma posição relativa nos dois retângulos.

5. Defina espaços métricos compactos. Dê exemplo. Mostre que todo espaço compacto é limitado. Caracterize conjuntos compactos contidos em $\mathbb{R}^n$. No caso geral, quais são as condições para que um espaço seja compacto?

6. Mostre que se M for um espaço métrico compacto então $F \subset M$ é compacto se e somente se F for fechado.

7. Mostre que todo espaço compacto é completo. Dê exemplo.

8. Mostre que a imagem de um compacto por uma aplicação contínua é compacto. Dê um exemplo.

9. Mostre que um espaço métrico M é compacto se e somente se toda função real contínua e positiva possui ínfimo positivo.

10. Defina espaço métrico separável. Verifique que todo espaço métrico compacto é separável porque verifica a propriedade de Lindelöf.

EXTRAS

1. Em uma ilha, uma população de tartarugas se reduz a um fator de $a = 1/2$ por ano. Por outro lado, em cada verão chegam mais 50.000 tartarugas de outra ilha. Se em um certo ano particular a população era de 10.000 tartarugas, quantas tartarugas teremos depois de:

   a) Um ano.

   b) Dois anos.

   c) 500 anos.

2. Use o teorema de Baire para mostrar que o conjunto de Cantor não é enumerável (ver Lima, Exemplo 31, pág 192).

3. Lima, Capítulo 7, exercícios 1-45.

4. Lima, Capítulo 8, exercícios 1-77.

5. Lima, Capítulo 9, exercícios 1-21.