4a. Lista de Exercícios

MA-604 Topologia dos Espaços Métricos

(MM-204 Introdução à Topologia)

1. Mostre que, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, o segmento de reta $\{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$ é conexo.

2. Dados $a, b \in M$, suponha que exista um subconjunto $X \subset M$, aberto e fechado, tal que $a \in X$ e b não pertence a X. Então nenhum subconjunto conexo pode conter a e b simultaneamente.

3. Um espaço métrico M é conexo se e somente se toda função contínua $f : M \to \{0,1\}$ é constante.

4. Sejam M um espaço métrico com a propriedade do valor intermediário, isto é, toda função contínua $f_n : M \to \mathbb{R}$ que assume um valor positivo e outro negativo se anula em algum ponto de M. Prove que M é conexo.

5. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma família *finita* de subconjuntos de um espaço métrico M, tais que $X_n \bigcap X_{n+1} \neq \emptyset$ para todo n. Mostre que $X = \bigcup X_n$ é conexo.

6. Seja $Y \subset \mathbb{R}^2$ homeomorfo a $\mathbb{R}$. Então $int(Y) = \emptyset$ na topologia de $\mathbb{R}^2$.

7. Para toda função contínua $f : S^1 \to \mathbb{R}$, prove que existe um ponto $x \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$. Note que as funções $x \in S^1$ podem ser consideradas como funcões $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = f(2\pi)$.

Exercícios Extras

Todos do Elon L. Lima, Capítulo 4:

Exercícios: 8, 25, 50, 42.