3a. Lista de Exercícios

MA-604 Topologia dos Espaços Métricos

(MM-204 Introdução à Topologia)

1. Mostre exemplos de interseção infinita de abertos que não é aberto e união infinita de fechados que não é fechado. Um conjunto $A \subset M$ é aberto se e somente se é uma união de bolas abertas.

2. Use que as projeções $\pi_i : M_1 \times \ldots \times M_n \to M_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, são contínuas para mostrar que o produto cartesiano $A_1 \times \ldots \times A_n$ de conjuntos abertos $A_i \subset M_i$ é subconjunto aberto de $M = M_1 \times \ldots \times M_n$.

3. Sejam $f_1, \ldots, f_n : M \to \mathbb{R}$ funções reais contínuas. O conjunto A formado pelos pontos $X \in M$ tais que $f_1(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0$ é aberto em M.

4. Verifique que para que duas métricas d_1 e d_2 sejam equivalentes no conjunto M é necessário e suficiente que os espaços métricos (M, d_1) e (M, d_2) possuam os mesmos conjuntos abertos (tem a mesma topologia).

5. A fronteira de um aberto tem interior vazio.

6. Se um conjunto e seu complementar têm ambos interior vazio então a fronteira de cada um deles é o espaço todo.

7. Seja C o conjunto das funções contínuas $f : [0, 1] \to [0, 1]$ com a métrica do supremo. O subconjunto de C formado pelas funções que não são sobrejetivas é aberto.

8. Dados $A \subset M$ e $B \subset N$, temos que $int(A \times B) = int(A) \times int(B)$ e $\partial(A \times B) = (\partial A \times B) \bigcup (A \times \partial B)$ em $M \times N$.

9. A fim de que uma função $f : M \to \mathbb{R}$ seja contínua, é necessário e suficiente que para todo $a \in \mathbb{R}$, os conjuntos $X_a = \{x \in M; f(x) < a\}$ e $Y_a = \{x \in M; f(x) > a\}$ sejam abertos em M.

10. Dados X, Y num espaço métrico M, tem-se que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê um exemplo em que esta última inclusão não é igualdade.

11. Se X é denso em M e $f : M \to N$ é uma aplicação contínua sobrejetiva, então $f(X)$ é denso em N.

Exercícios Extras

Todos do Elon L. Lima, Capítulo 3:

Exercícios: 9,12, 15, 16, 17, 25, 27, 28–34, 42–45, 48, 53, 55–58, 67–69, 79.