Lista 0 Análise I MA-502

1. Escreva a negação das seguintes sentenças.

   (a) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$.

   (b) $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$.

   (c) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2. Escreva cada uma das sentenças do exercício anterior, assim como suas negações, em palavras substituíndo:

   - $\forall$ por "para todo" ou "dado" ou "para qualquer" ...
   - $\exists$ por "existe" ou "para algum" ...
   - $\Rightarrow$ por "se ... então ..." ou "... implica ... "

3. Use indução finita para provar as seguintes igualdades

   (a) $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

   (b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} + \cdots + \dfrac{n}{2^n} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$

   (c) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

   (d) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$

4. Use indução para mostrar a fórmula do binômio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

   onde $\dbinom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$ é o número de i combinações de n elementos. (em algum momento será usada a igualdade $\dbinom{n}{i} + \dbinom{n}{i+1} = \dbinom{n+1}{i+1}$)

5. Seja $A(n)$ a afirmação $n = n + 1$. Prove que $A(n) \Rightarrow A(n+1)$. Pode-se concluir que $n = n + 1$ para todo n?

6. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, prove que $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

7. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, prove que $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

8. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, prove que $|x| \leq y$ se e somente se $-y \leq x \leq y$.

9. Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$, prove que $|x - y| < z$ se e somente se $y - z \leq x \leq y + z$.

10. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Prove que $\{x : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

11. Prove que os números naturais e os números pares tem o mesmo cardinal.

12. Prove que a função $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$f(n,m) = 2^{n-1}(2m-1)$$

é injetora. Conclua que o produto de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.

13. Prove que uma união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

14. Prove que a função $g : \mathbb{R} \rightarrow (0,1)$ definida por

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(x)}{\pi}$$

é bijetora.

15. Prove que a função $h : (a,b) \rightarrow (0,1)$ definida por

$$h(x) = \frac{x-a}{x-b}$$

é bijetora.

16. Seja X um conjunto finito não vazio. Prove que não existe uma bijeção de X com um subconjunto proprio.

17. Prove que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ tem o mesmo cardinal.

18. Seja X um conjunto enumerável e F um conjunto finito. Prove que $X \cup F$ é enumerável.

19. Utilizando as espanções diadicas do intervalo $(0,1)$. Prove que o cardinal de $\mathbb{R}$ é o mesmo que o de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

20. Seja X um conjunto não vazio. Prove que não existe uma bijeção de X com $\mathcal{P}(X)$.