Lista 1 Análise I MA-502

1. Sejam A e B subconjuntos não vazios e limitados de $\mathbb{R}$. Suponha que a seguinte propriedade é satisfeita: $\forall x \in A, \exists y \in B, y \leq x$. Mostre que $\inf B \leq \inf A$.

2. Sejam A, B subconjuntos não vazios e limitados de $\mathbb{R}$. Suponha que a seguinte propriedade é satisfeita: $\forall x \in A, \exists y \in B, x \leq y$. Mostre que $\sup B \geq \sup A$.

3. Mostre que toda sequência convergente é limitada.

4. Escreva com detalhes a negação de $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

5. Sejam x_n uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Prove que a nova sequência y_n definida por $y_n = x_{2n+9}$ verifica que $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

6. Prove que toda equência monótona limitada é convergente.

7. Seja (x_n) uma sequência tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x > 0$. Prove que

   a) Existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_k > 0$ para todo $k \geq M$.

   b) Para todo $a < x$ existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $x_k > a$ para todo $k \geq M$.

8. Seja (x_n) uma sequência. Definimos a sequência $y_n = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$. Prove que se existe $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Pode (y_n) ser convergente, mas que (x_n) não o seja?.

9. Sejam x_n e y_n sequências tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Prove que

   a) $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

   b) $\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$.

   c) $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$.

   d) Se $y \neq 0$ então $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$.

10. Prove que:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^7 - 2n^6 + 5n^3 - 2n^2 + n - 1}{5n^7 - 8n^3 - 3n^2 - 9n - 1} = \frac{3}{5}.$$

11. Sejam (x_n) e (y_n) sequências tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Prove que $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

12. Sejam (x_n) e (y_n) sequências tais que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e (y_n) é limitada. Prove que
$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

13. Sejam x_n e y_n sequências tais que $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove se existem $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ e $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, então $x \leq y$.

14. Para uma sequência x_n limitada, considere as seguintes notações: (i) para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{x_m : m \geq n\}$; (ii) $i_n = \inf A_n$, $s_n = \sup A_n$. Mostre que as sequências i_n e s_n são limitadas, i_n é crescente e s_n cresecente. Mostre também que para todo mm,n$\in \mathbb{N}$, vale $i_n \leq s_m$. Conclua que existem os limites $i = \lim i_n$ e $s = \lim s_n$. Mostre que $i \leq s$. (Por definição $\liminf x_n = i$ e $\limsup x_n = s$.)

15. Com as notações do exercício anterior, sejam também $I = \{i_n : n \in \mathbb{N}\}$, $S = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$. Descreva A_n, i_n, s_n, I e S, para cada uma das sequências x_n abaixo:

(a) $x_n = \dfrac{1}{n}$; (b) $x_n = \begin{cases} 1 - 1/n \text{ se } n \text{ é par} \\ 2 + 1/n \text{ se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ (c) $x_n = (-1)^n$; (d) $x_n = \dfrac{1+n}{2+3n}$.

16. Seja x_n uma sequência limitada (superiormente e inferiormente) e considere a sequência $y_n = -x_n$. Mostre que $\limsup y_n = -\liminf x_n$ e $\liminf y_n = -\limsup x_n$. (Sugestão: use as definições e a propriedade $\sup(-A) = -\inf A$, para um conjunto A).

17. Seja x_n uma sequência limitada em $\mathbb{R}$. Mostre que se toda subsequência x_{n_k} de x_n tem limite então a sequência converge, isto é, $\exists \lim x_n$. (Sugestão: suponha por absurdo que x_n tem mais de um ponto de acumulação e construa uma subsequência que não tem limite).

18. Mostre que se uma sequência x_n em $\mathbb{R}$ não é limitada então existe uma subsequência x_{n_k} de x_n que não converge.

19. Seja x_n uma sequência em $\mathbb{R}$. Use os dois exercíos anteriores para mostrar (sem a hipótese de que x_n é limitada) que se toda subsequência x_{n_k} de x_n converge então x_n também converge.

20. Dê, se possível, exemplo (s) para as seguintes situações:

    (a) Uma sequência limitada x_n tal que seu limite superior é diferente do supremo do conjunto de seus termos, isto é, $\limsup x_n \neq \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

    (b) O mesmo que o anterior, com $\liminf$ no lugar de $\limsup$ e $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ no lugar de $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

    (c) Uma sequência limitada x_n tal que $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ não é ponto de acumulação da sequência.

    (d) Uma sequência limitada x_n tal que $\limsup x_n = \liminf x_n$.

    (e) Sequências x_n e y_n em $\mathbb{R}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \neq y_n$ e $\limsup x_n = \limsup y_n$ e $\liminf x_n = \liminf y_n$.

    (f) Uma sequência x_n que não é limitada, mas que tenha ponto de acumulação.