Teste 3 MASO2 10/11/2011

(Soluções)

1) Para todo ponto x deste compacto K existe um aberto A_x com $x \in A_x$ e $A_x \cap (K - \{x\}) = \phi$. Então $K \subseteq \bigcup_{x \in K} A_x$. Como K é compacto, $\exists$ subcobertura finita $K \subseteq A_{x_1} \cup A_{x_2} \cup \ldots \cup A_{x_n}$ $\therefore$

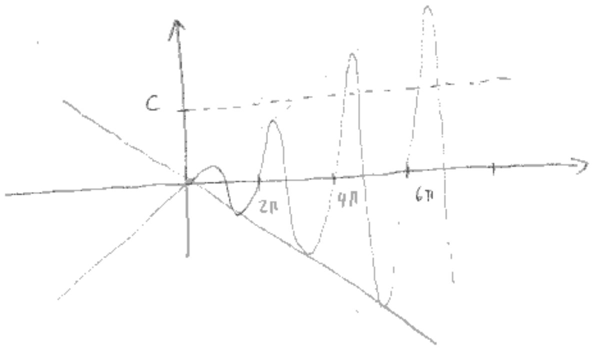
$K \subseteq \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ portanto é finito.

Exemplos: $X = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ é fechado ilimitado e todos os pontos são isolados.

$Y = \left\{\frac{1}{n} \, ; n \in \mathbb{N}\right\}$ é limitado, não-fechado $\left(\overline{Y} = Y \cup \{0\}\right)$

e todos os pontos são isolados. $\blacksquare$

2)



Escolha $K_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $2K_1\pi \geq c$.

Como f é contínua, considere a restrição $f\Big|_{[2K_1\pi,\, 2K_1\pi + \pi/2]} : [2K_1\pi, 2K_1\pi + \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Temos que $f(2K_1\pi) = 0$ e $f(2K_1\pi + \pi/2) = 2K_1\pi + \pi/2 > c$.

Portanto pelo T.V. Intermediário, $\exists \; x_1 \in (2K_1\pi, 2K_1\pi + \pi/2)$ t.q. $f(x_1) = c$.

Repete o argumento para cada $K_n = K_1 + (n-1)$. Então $\exists \; x_n \in (2K_n\pi, 2K_n\pi + \pi/2)$ com $f(x_n) = c$. Como $K_n \longrightarrow +\infty$ temos

$x_n \longrightarrow +\infty$ e $\lim f(x_n) = c$ $\blacksquare$

3) Sabemos por resultado da teoria que se f e g são contínuas em $a \in X$ e $f(a) > g(a)$ então existe uma vizinhança (um aberto) $\mathcal{U}$ contendo a t.q. em $X \cap \mathcal{U}$ f é maior que g, i.e, nesta vizinhança $\varphi = f$ e $\psi = g$. Portanto φ e ψ são contínuas em a. (análogo se $f(a) < g(a)$).

<u>Caso $f(a) = g(a)$:</u>

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ t.q.

$$x \in (a-\delta_1, a+\delta_1) \cap X \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

$$x \in (a-\delta_2, a+\delta_2) \cap X \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \varepsilon.$$

Tomemos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Como $\varphi(a) = f(a) = g(a)$ temos:

$$\text{Se } x \in (a-\delta, a+\delta) \cap X \Rightarrow \begin{cases} \text{Se } f(x) \geq g(x),\ |\varphi(x) - \varphi(a)| = |f(x) - f(a)| < \varepsilon \\ \\ \text{Se } f(x) < g(x),\ |\varphi(x) - \varphi(a)| = |g(x) - g(a)| < \varepsilon. \end{cases}$$

$\therefore$, em qualquer um dos casos $|\varphi(x) - \varphi(a)| < \varepsilon$.

$\therefore$ φ é contínua em a.

Argumento análogo para $\psi = \min\{f, g\}$

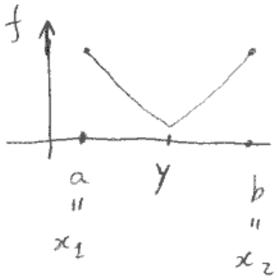
4) Fixemos um $x \in \overline{X}$. Por continuidade da f, dado um $\varepsilon > 0$,

$\exists$ aberto $\mathcal{U}$ e $\exists\, y \in \mathcal{U} \cap X$ t.q. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Como $y \in X$, $f(y) = 0 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$. Como ε é arbitrariamente pequeno então $|f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ ■

5) Pelo teorema de Weierstrass, $\exists\, x_1 \in [a,b]$ que é o ponto de máximo. Mas pela hipótese, $\exists\, x_2$ t.q. $f(x_1) = f(x_2)$ são pontos (distintos) de máximo. De novo pelo teorema de Weierstrass, existe $y \in (x_1, x_2)$ que minimiza f em $[x_1, x_2]$, assumindo sem perda de generalidade que $x_1 < x_2$.

Vamos mostrar que $x_1 = a$, o extremo esquerdo do intervalo. De fato, por absurdo, se $a < x_1$ então $\exists\, z \in [a, x_1)$ t.q. $f(z)$ tem seu valor repetido, pelo T.V. Intermediário, mais duas vezes pelo menos: em $(x_1, y]$ e em $[y, x_2)$, absurdo pela hipótese.



Pelo mesmo argumento $x_2 = b$.

Considere a função contínua $-f$ em $[a,b]$.

Pelo mesmo argumento seus máximos tem que estar nos extremos a e b. Absurdo!

Segue que é impossível função contínua com esta propriedade. ■

6) De fato, se X não for fechado, $\exists\ a \in \overline{X} - X$.

Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$.

f é contínua mas não uniformemente contínua em $\mathbb{R} - \{a\}$, portanto

é contínua mas não uniformemente contínua em X.

Segue que para toda contínua ser uniformemente contínua,

preciso que X seja fechado.

Considere $X = \mathbb{N}$ (fechado, discreto e não limitado).

Por ser discreto, toda função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua.

Além disso $\exists\ \delta > 0$ t.q. $\forall x \in X$, $(x-\delta, x+\delta) \cap X = \{x\}$
$(\delta < 1)$

"uniformemente discreto" (compare com o conjunto discreto $\left\{\frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}\right\}$)

Portanto toda função $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua. ∎