Soluções do Teste 2 29/Set/2011

1) Suponha que x_n seja uma sequência de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_1$ t.q. $n, m > n_1 \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon/3$. Seja n_0 dado por hipótese, i.e. t.q. se $n > n_0$, $|x_n - y_n| < \varepsilon/3$.

Então se $m, n > N = \text{Máx}\{n_0, n_1\}$ então

$$|y_m - y_n| = |y_m - x_m + x_m - x_n + x_n - y_n|$$

$$\leq |y_m - x_m| + |x_m - x_n| + |x_n - y_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

A recíproca é análoga. $\blacksquare$

2) a) $x_n = \frac{1}{n}$. $\sup\{x_n ; n \in \mathbb{N}\} = 1$ e $\limsup x_n = \lim x_n = 0$.

b) Pode ser o mesmo acima.

c) $x_n = (-1)^n$ e $y_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ for múltiplo de } 4 \\ -1 & \text{se } n \text{ for (múltiplo de 4)} + 2 \end{cases}$ $\blacksquare$

3) 2 maneiras fáceis e diretas:

1) Use que $\big||x_n| - |x_m|\big| \leq |x_n - x_m|$

2) x_n é convergente $\Rightarrow |x_n|$ é convergente $\Leftrightarrow |x_n|$ é de Cauchy.

Não vale a recíproca. Exemplo $x_n = (-1)^n$ não é de Cauchy mas $|x_n| = 1$ é de Cauchy $\blacksquare$