Análise I   MA 502 P   Teste 1   30/08/2011

Soluções

1) Tem muitos (infinitos) soluções. Esse exercício é o mesmo exercício 4 que aparece no gabarito da Prova 1.

<u>Solução 1</u>: $g(n)$ = soma dos algarismos da representação de n na base decimal.

<u>Solução 2</u>: $g(n)$ = expoente diferente de zero do menor primo na decomposição de n em fatores primos.

<u>Solução 3</u>: $g(n)$ = dada pela seguinte tabela

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
g	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
	1	1	2	1	2	3	1	2	3	4	1...

2) $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f^{-1}(y_i)$ onde y_i é uma enumeração de Y.

União enumerável de enumerável é enumerável.

3) $\phi_1 : \mathbb{N} \to X$ bijeção e $\phi_2 : \{1, \dots, k\} \longrightarrow F$ bijeção.

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow X \cup F$$

$$n \longmapsto \varphi(n) = \begin{cases} \phi_2(n) & \text{se } n \in \{1, \dots, k\} \\ \phi_1(n-k) & \text{se } n > k. \end{cases}$$

4) (a) Descreve o que chamamos de $\limsup A_n = \bigcap_{n}^{\infty} \bigcup_{m>n}^{\infty} A_m$.

Ainda em outras palavras, $x \in \limsup A_n$ se x pertence a infinitos A_n's.

(b) Descreve o que chamamos de $\liminf A_n = \bigcup_{n}^{\infty} \bigcap_{m>n}^{\infty} A_m$.

Ainda em outras palavras, $x \in \liminf A_n$ se x não pertence somente a uma quantidade finita de A_n's.

<u>$\liminf A_n \subset \limsup A_n$:</u> de fato todo elemento x que só não pertence a uma quantidade finita de A_n's, irá pertencer ~~a~~ a todos os outros (infinitos) A_n's $\boxtimes$

5) (a) $\exists \varepsilon > 0$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq n_0$ com $|x_n - L| \geq \varepsilon$.

(b) $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists \varepsilon > 0$ e $\exists n \geq 0$ com $|x_n - L| \geq \varepsilon$.

(c) $\exists \varepsilon > 0$; $\forall \delta > 0$ $\exists x$ com $|x - x_0| < \delta$ mas que $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

6) Definições da teoria. Se $x \in P$ (positivos), $x \cdot x \in P$ e se $-x \in P$, $x \cdot x \in P$ também. Em particular $1 = 1 \cdot 1$ $\therefore$ $1 \in P$.

Portanto se $x^2 = -1$ para algum elemento x do corpo, esse corpo não pode ser ordenado. Em $\mathbb{C}$, $i = \sqrt{-1}$ é tal que $i^2 = -1$ $\therefore$ $\mathbb{C}$ não pode ser um corpo ordenado.