MA502 Turma P 2S 2011 - Prova 3

Nome: ____ RA: __________ 24/11/2011

Escolha 5 questões para resolver (assinale quais) dentre as 6 questões abaixo.

1. Defina conjuntos compactos em $\mathbb{R}$. Mostre que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é compacto se e somente se toda sequência de pontos em X possui uma subsequência que converge para um ponto de X.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ se $x \neq 0$. Mostre que para todo $c \in [0, 1]$ existe uma sequência de pontos $x_n \neq 0$ tais que $\lim x_n = 0$ e $\lim f(x_n) = 0$.

3. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ uniformemente contínuas. Prove que $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}$ dadas por $\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ também são uniformemente contínuas.

4. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável no intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que se sua derivada for limitada então f é de Lipschitz.

5. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável no intervalo aberto (a, b), com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Se $f'(x) = 0$ apenas em um conjunto finito, prove que f é crescente.

6. (a) Mostre como se chega aos polinômios de Taylor da função $f(x) = \operatorname{senh} x$ ao redor do ponto $a = 0$.

   (b) Calcule as derivadas de ordem 1210 e 1211 da função $g(x) = x^5 \operatorname{senh} x^6$.