2ª Prova MA502 13/10/2011

Soluções

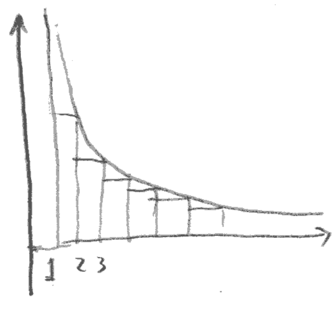
1) Vamos mostrar que o termo geral $\frac{\log n}{n^2} < \frac{1}{n^{3/2}}$ para n suficientemente grande. Como $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ é convergente, pelo critério da comparação a série em questão converge.

De fato: $\frac{\log n}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \cdot \frac{\log n}{\sqrt{n}}$ e

$$\lim \frac{\log n}{\sqrt{n}} = 0 < 1 \quad \therefore \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n > N \Longrightarrow$$

$$\frac{\log n}{\sqrt{n}} < 1 \Longrightarrow \frac{\log n}{n^2} < \frac{1}{n^{3/2}}.$$

2) Comparando com a função $f : (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x(\log x)^2}$



$$\sum_{n=2} \frac{1}{n(\log n)^2} < a_2 + \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^2} = a_2 + \frac{1}{\log 2}$$

$\therefore$ converge.

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \log x \\ du = \frac{1}{x}\,dx \end{array} \qquad I = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{\log 2}}$$

Questão 2: Ver nas soluções do Teste 2.

Questão 3: Usando que a sequência de somas parciais é de Cauchy, então $\exists N$ t.q. $n > N$ $\sum_{j=n+1}^{2n} a_n < \varepsilon$

Como a sequência é decrescente

$$n\, a_{2n} \leq \sum_{j=n+1}^{2n} a_n < \varepsilon \implies n\, a_{2n} \to 0 \implies 2n\, a_{2n} \to 0$$

i.e. a subsequência dos índices pares tende a zero.

Para a subsequência dos índices ímpares temos:

$$(2n+1)\, a_{2n+1} = 2n\, a_{2n+1} + a_{2n+1} \leq 2n\, a_{2n} + a_{2n} \to 0$$

■

Questão 4: Seja $x_n \to x$. Vamos mostrar que $s_n \to x$.

Precisamos mostrar que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $n > N$ temos

$$|s_n - x| < \varepsilon \iff |x_1 + x_2 + \ldots + x_n - nx| < n\varepsilon .$$

Como $x_n \to x$, $\exists \underset{K(\varepsilon)}{\underset{\shortparallel}{K}}$ t.q. $n > K \implies |x_n - x| < \varepsilon/2$

então

$$\left|(x_1 - x) + \dots + (x_K - x) + (x_{K+1} - x) + \dots + (x_n - x)\right| \leq$$

$$\left| s_K - K\cdot x\right| + \left|x_{K+1} - x\right| + \dots + \left|x_n - x\right| =$$

$$\left|s_K - K\cdot x\right| + (n-K)\frac{\varepsilon}{2} \leq n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + n\frac{\varepsilon}{2} = n\varepsilon$$

se $n\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \geq |s_K - K\cdot x|$. Então tome

$$N > \text{máx}\left\{\frac{2|s_K - Kx|}{\varepsilon}, K(\varepsilon)\right\}$$

$\blacksquare$

Questão 5: Basta mostrar que se $(\varphi(n) - n)$ for ltdo então $\sum b_n = \sum a_n$.

De fato, assuma que $|\varphi(n) - n| < K \quad \forall n \in \mathbb{N}$, então

$$s_n = a_1 + \dots + a_{n-K} + \overbrace{a_{n-K+1} + \dots + a_n}$$

$$t_n = b_1 + \dots + b_{n-K} + \overbrace{b_{n-K+1} + \dots + b_n}$$

diferem, no máximo, em $2K$ parcelas como assinaladas acima, i.e.

$$\{a_1, \dots, a_n\} \,\Delta\, \{b_1, \dots, b_n\} \subset \{a_{n-K}, a_{n-K+1}, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+K}\}$$

onde Δ = diferença simétrica dos conjuntos

$$\therefore \quad |s_n - t_n| \leq \sum_{j=-K}^{K} |a_{n+j}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\therefore \quad \lim s_n = \lim t_n, \text{ i.e. } \sum a_n = \sum b_n$$

$\blacksquare$