1ª Prova Análise I MA502 13/09/2011

Soluções.

1) $I_n = [n, +\infty)$ são fechados, $I_{n+1} \subset I_n$ (decrescente) e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$.

$I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ são abertos, $I_{n+1} \subset I_n$ ltdos e $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$

Propriedade dos intervalos encaixantes: "sequência decrescente (encaixante) de intervalos fechados e limitados tem interseção não vazia".

$\therefore$ não contraria a propriedade.

2) (a) Use que $|x_n - 0| < \varepsilon \iff \big||x_n| - 0\big| < \varepsilon$. Portanto o mesmo $N(\varepsilon)$ da definição de limite serve para as duas igualdades.

(b) $0 < \left|\frac{sen(n)}{n}\right| < \frac{1}{n}$ $\therefore$ o mesmo $N(\varepsilon)\left(> \frac{1}{\varepsilon}\right)$ que se usa para mostrar que $\frac{1}{n} \to 0$ serve para mostrar que

$$\left|\frac{sen(n)}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \therefore \quad \lim \frac{sen(n)}{n} = 0.$$

3) (a) A sentença é verdadeira. Sua inversa (falsa) é dada por

$$\exists x > 0;\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n > n_0 \text{ e } x \notin [-n, n]$$

(b) A sentença é falsa. Sua inversa (verdadeira) é dada por

$$\forall n_0,\ \exists x > 0 \text{ e } \exists n > n_0 \text{ com } x \notin [-n, n].$$

c) $\exists \varepsilon > 0;\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n > n_0$ com $|x_n - L| \geq \varepsilon$.

4) Vários (infinitos) soluções. É o exercício "dual" do exercício 1 do teste T1, basta usar $\mathbb{N}_n = g^{-1}(n)$.

Outras soluções interessantes:

① $N_n = \{p \in \mathbb{N}:$ a soma dos algarismos na sua representação decimal seja $n\}$.

Exemplo: $N_1 = \{1, 10, 100, 1000, \text{etc}\}$

$N_2 = \{2, 11, 20, 101, 200, \text{etc}\}$

$N_3 = \{3, 21, 12, 30, 111, \text{etc}\}$

$\vdots$

② $N_1 = \{1\} \cup \{\text{pares}\}$. $\quad \underset{2}{p_1}, \underset{3}{p_2}, p_3$, etc sequência de primos.

$N_2 = \{n : n = 3^{e_3} \cdot 5^{e_5} \cdots$ com $e_3 \neq 0\}$ = múltiplos de 3 $\setminus N_1$

$N_3 = \{n : n = 5^{e_5} 7^{e_7} \cdots$ com $e_5 \neq 0\} =$ " " $5 \setminus (N_1 \cup N_2)$

$\vdots$

etc

5) a) Axioma do Supremo: "No corpo dos reais $\mathbb{R}$ todo conjunto limitado superiormente tem supremo em $\mathbb{R}$". Não vale nos corpos que não são completos, exemplo $\mathbb{Q}$.

(b) Axioma do Supremo $\Rightarrow \mathbb{N}$ não é ltdo. De fato se for ltdo $\overset{A.S.}{\Longrightarrow}$ $\exists c$ seu supremo. Então $c-1$ não é cota superior $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ com $c - 1 < n \Rightarrow c < n+1$ (Absurdo).

Assim, dado $\varepsilon > 0$ tome (existe pelo parágrafo anterior)

$n > \frac{1}{\varepsilon}$. Então $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

c) Use item (b) com ~~$a \neq \frac{b}{a}$~~ $\varepsilon = \frac{a}{b}$. $\exists\, n$ t.q. $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$

$\iff na > b$.

d) $\exists\, \bar{m} \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{\bar{m}} < (b-a)$. Tome $p^n > \bar{m}$.

Use o item acima substituindo a por $\frac{1}{p^n}$ e b por a.

Então $\exists\, m > 0$ (se $0 < a, b$) t.q. $\frac{m}{p^n} > a$.

Tome m o menor deles que satisfaz essa condição. Então

$$\frac{m-1}{p^k} \leqslant a \implies \frac{m}{p^k} \leqslant a + \frac{1}{p^k} < b.$$

Portanto $\frac{m}{p^k} \in (a, b)$.

Se $a < 0$ vale o mesmo raciocínio, use $m \in \mathbb{Z}$.