MA502 Turma P 2S 2011 - Prova 1

Nome: ____ RA: __________ 13/09/2011

1. Dê um exemplo de uma sequência decrescente de intervalos fechados cuja intersecção seja vazia e um exemplo de uma sequência decrescente de intervalos limitados cuja intersecção seja vazia. Isso contraria a propriedade dos intervalos encaixantes?

2. (a) Mostre que $\lim x_n = 0$ se e somente se $\lim |x_n| = 0$.

   (b) Mostre qual é o limite de
   $$\lim \frac{\operatorname{sen}(n)}{n}$$

3. Escreva a negação matemática das seguintes expressões. Nos itens (a) e (b) aponte se a sentença ou se sua inversa é matematicamente verdadeira.

   (a) $\forall x > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Longrightarrow x \in [-n, n]$.

   (b) $\exists n_0 \in \mathbb{N}; \forall x > 0; n > n_0 \Longrightarrow x \in [-n, n]$.

   (c) $\lim x_n = L$

4. Exprima $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 \cup \cdots \cup \mathbb{N}_n \cup \cdots$ como uma união infinita de subconjuntos infinitos disjuntos.

5. (a) Enuncie o axima do supremo deixando explícito o corpo onde ele vale e dando um exemplo de corpo onde ele não vale.

   (b) Mostre que esse axioma implica que para todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro n tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (i.e. trata-se de um corpo arquimediano).

   (c) Equivalentemente ao item anterior, para todo $0 < a, b$, existe um inteiro n tal que $na > b$.

   (d) Agora use esse resultado para mostrar que dado um intervalo não degenerado $I = (a, b)$ e um número natural $p > 1$, existe um número racional da forma $\frac{m}{p^n}$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ que está em I.