2ª Prova
MA111 - Cálculo I - Turma Z
25/10/2010

NOME: GABARITO RA:
Curso:

Escreva de maneira legível, organizando bem as idéias e justificando as passagens. Use rascunhos antes de escrever as respostas. Não destaque as folhas. **Boa prova!**

1) (valor: 1,0 cada item) Calcule as derivadas justificando cada passagem:

a) $f(x) = (\cos x)^{x^2}$.

b) $x(t) = \dfrac{\ln(t^2)}{1+t^2}$.

c) $y = \operatorname{arcsen}(x^2)$ (justifique a partir da derivada do seno).

Solução:

a) $f(x) = e^{x^2 \ln(\cos x)}$, portanto, pela regra da cadeia

$$f'(x) = \left[2x \ln(\cos x) + x^2 \frac{(-\operatorname{sen} x)}{\cos x}\right] e^{x^2 \ln(\cos x)}.$$

$$\boxed{f'(x) = \left[2x \ln(\cos x) - x^2 \operatorname{tg} x\right] (\cos x)^{x^2}}.$$

b) Pela regra do quociente: $x'(t) = \dfrac{\frac{1}{t^2} \cdot 2t\,(1+t^2) - \ln(t^2)(1+t^2)}{(1+t^2)^2}$

$$x' = \frac{\frac{2}{t}(1+t^2) - 2(1+t^2)\ln t}{(1+t^2)^2}$$, portanto, multiplicando por t

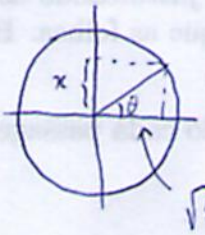
$$\boxed{x'(t) = \frac{2\left(1+t^2 - 2t(1+t^2)\ln t\right)}{t\,(1+t^2)^2}}.$$

c) <u>1ª maneira</u>: (A partir de $\text{arcsen}'(x)$)

Como $\text{sen}(\text{arcsen}\, x) = x$, pela regra da cadeia

$$\cos(\text{arcsen}\, x) \cdot \text{arcsen}'(x) = 1 \Rightarrow \text{arcsen}'(x) = \frac{1}{\cos(\text{arcsen}\, x)}$$

Pelo círculo trigonométrico temos que



$$\sqrt{1-x^2} = \cos(\text{arcsen}\, x)$$

Substituindo, ficamos com $\text{arcsen}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Agora, a partir da regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}\,\text{arcsen}(x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

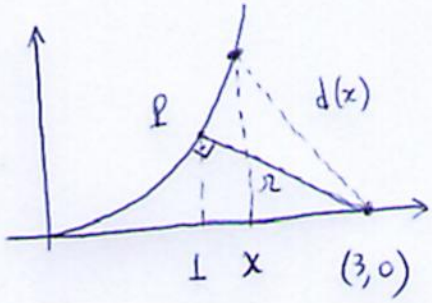
<u>2ª Maneira</u>: $\text{sen}\left(\text{arcsen}(x^2)\right) = x^2$. Derivando nos dois lados

$$\cos\left(\text{arcsen}(x^2)\right) \cdot \left(\text{arcsen}(x^2)\right)' = 2x$$

$$\therefore \left(\text{arcsen}(x^2)\right)' = \frac{2x}{\cos\left(\text{arcsen}(x^2)\right)},$$ finalmente

$$\boxed{\left(\text{arcsen}(x^2)\right)' = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}}$$

2) (2,5 pontos) Encontro o ponto $P = (a, b)$ da curva $y = x^2$ que se encontra mais próximo do ponto $(3, 0)$. Verifique que a reta que passa por P e por $(3, 0)$ é normal ao gráfico no ponto P.



Solução: A distância de pontos da curva (x, x^2) até o ponto $(3,0)$ é dada por $d(x) = \sqrt{(x-3)^2 + (x^2-0)^2}$.

O valor de x para o qual a distância é mínima é dado por

$$d'(x) = 0 \quad \text{ou} \quad d'(x) = \frac{4x^3 + 2x - 6}{2\sqrt{(x-3)^2 + x^4}} = 0$$

Portanto em $x = 1$ temos a menor distância, com $P = (1, 1)$.

A reta r representada acima tem coeficiente angular $a_r = \frac{1-0}{1-3}$

$\Rightarrow a_r = -1/2$. Ela é normal ao gráfico se for perpendicular à reta tangente em P, que tem coeficiente angular dado por $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$.

Como $f'(1) \cdot a_r = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ então r é normal ao gráfico.

3) a) (0,75) Descreva a expansão em série de Taylor de uma função infinitamente derivável na reta $\mathbb{R}$ ao redor de um ponto a.

b) (0,75) Determine a série de Taylor de $\sinh x = 1/2(e^x - e^{-x})$ ao redor de $a = 0$.

c) (0,5 pt) Use o item (b) para descrever a série de Taylor de $f(x) = x^{11}\sinh(x^2)$ (ao redor do mesmo ponto $a = 0$).

a) $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)^1}{1!} + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \dots$$

ou ainda

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)h}{1!} + \frac{f''(a)h^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(a)h^n}{n!} + \dots$$

b) $f(x) = \operatorname{senh}(x)$ então suas derivadas são dadas por

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cosh(x) & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ \operatorname{senh}(x) & \text{se } n \text{ for par} \end{cases} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$$

Então $$\operatorname{senh}(x) = 0 + x + 0 + \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\boxed{\operatorname{senh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots}$$

c) $$x^{11}\operatorname{senh}(x^2) = x^{11}\left((x^2) + \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^5}{5!} + \frac{(x^2)^7}{7!} + \dots\right)$$

$$= x^{13} + \frac{x^{17}}{3!} + \frac{x^{21}}{5!} + \frac{x^{25}}{7!} + \dots$$

4) Considere a função $f(x) = xe^{-x}$.

a) (0,5) Determine o domínio e calcule os limites $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ e $\lim_{t\to-\infty} f(t)$.

b) (0,75) Estude o sinal de f' e veja quais são os intervalos de crescimento e decrescimento.

c) (0,75) Estude o sinal de f'' e veja quais são os intervalos onde a concavidade é para cima ou para baixo.

d) (0,5) Utilizando essas informações, esboce o gráfico da f.

Solução: a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \underset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. E

$\lim_{x\to-\infty} x e^{-x} = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$.

b) $f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = (1-x)\underbrace{e^{-x}}_{>0}$

f': $+ \quad + \quad 1 \quad - \quad -$

MÁXIMO.

c) $f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + x e^{-x} = (x-2)e^{-x}$

f'': $- \quad 0 \quad - \quad 2 \quad + \quad +$

pto inflexão.

d) Gráfico: $f(0) = 0$