1ª Prova
MA111 - Cálculo I - Turma Z
13/09/2010

NOME: GABARITO RA:
Curso:

Escreva de maneira legível, organizando bem as idéias e justificando as passagens. Use a folha de rascunho em anexo antes de escrever as respostas. Não destaque as folhas. **Boa prova!**

1) (valor: 0,5) Determine o domínio da função $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 3x}$. Agora calcule seus limites no infinito:

a) (valor: 1,0)

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 3x}\right)$$

b) (valor: 1,0)

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 3x}\right)$$

Resposta: Como não existe (em $\mathbb{R}$) raiz quadrada de número negativo, a única restrição para o domínio da f é que $x^2 - 3x \geq 0$.

Assim $\quad Dom(f) = (-\infty, 0] \cup [3, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$

a) $$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 3x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 3x)}{\left(x + \sqrt{x^2 - 3x}\right)}$$ (multiplicando pelo conjugado).

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{+3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1 + \sqrt{1 - 3/x}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\left(1 + \sqrt{1 - 3/x}\right)}$$

Desde que o lim no denom. não seja 0.

$$= \frac{3}{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \sqrt{1 - 3/x}\right)} = \frac{3}{2}.$$

b) $\lim_{x \to -\infty} x = -\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} -\sqrt{x^2 - 3x} = -\infty$

Assim, como não gera indeterminação,

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 3x} \right) = \lim_{x \to -\infty} x - \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - 3x}$$

$$= -\infty - \infty = -\infty$$

2) Calcule os limites justificando cada passagem:

a) (valor: 1,0)

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{5}{x^2-3x}$$

b) (valor: 1,5)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x-1}$$

a) $\lim_{x\to 3^+} \frac{5}{x^2-3x} = \lim_{x\to 3^+} \frac{5}{x}\cdot\frac{1}{(x-3)} = \lim_{x\to 3^+}\frac{5}{x}\cdot\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{(x-3)}$

se não gerar indeterminação

$= \frac{5}{3}\cdot(+\infty) = +\infty.$

b) Como $\operatorname{sen}\theta = -\operatorname{sen}(\theta-\pi)$ para todo $\theta\in\mathbb{R}$, então

$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{-\operatorname{sen}(\pi x-\pi)}{x-1}$

Mudança de variável: $u=\pi(x-1)$ então $x\to 1 \Leftrightarrow u\to 0$

$= -\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{\frac{u}{\pi}} = -\pi\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u} = -\pi\cdot 1 = -\pi$

limite trigonométrico fundamental

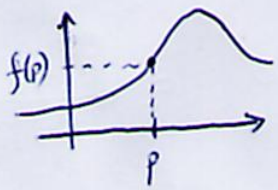
3) a) (valor: 1,0) Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, escreva com suas palavras o que significa f ser contínua em um ponto $p \in \mathbb{R}$. Agora defina essa continuidade usando ϵ e δ. Finalmente, dê exemplos (sem demonstrar) de uma função que seja contínua em um ponto e de uma função que não seja contínua em algum ponto.

b) (valor: 1,5) Enuncie o teorema do confronto. Use esse teorema para calcular o seguinte limite:

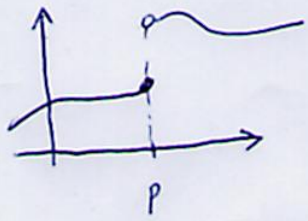
$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}$$

a) Várias maneiras de dizer. Por exemplo: que "perto" do ponto p o gráfico de f pode ser traçado sem tirar o lápis do papel. Matematicamente, de uma maneira mais preciso: f é contínua em p se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$.

Exemplos:



f contínua em p.



f não é contínua em p.

b) <u>Teorema do Confronto</u>: Dadas funções reais f, g, h tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x (em uma vizinhança de p, exceto possivelmente no próprio p, onde a ordem pode ser qualquer); então

Se $\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} h(x)$ então $\exists \lim_{x \to p} g(x)$ e esse limite é igual aos limites da f e da h.

<u>Aplicação:</u>

$$\underbrace{-x^2}_{f} \leq x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} \leq \underbrace{x^2}_{h}$$

Como $\lim_{x \to 0} x^2 = \lim_{x \to 0} -x^2 = 0$ então, pelo Teorema do Confronto

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} = 0.$$

4) a) (valor: 1,5) Calcule os limites abaixo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}.$$

b) (valor: 1,0) Calcule

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}.$$

a) Mudança de variável: $h = \frac{3}{x}$ então $x \to +\infty \iff h \to 0^+$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{h\to 0^+}(1+h)^{2\cdot\frac{3}{h}} = \lim_{h\to 0}(1+h)^{6/h}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}\right)^6 = e^6$$

Uma dos versões do limite exponencial fundamental ∎

b) $$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2} = \lim_{x\to 2} -\left(\frac{\cancel{x-2}}{2x}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{x-2}}$$

$$= \lim_{x\to 2} -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

Porque $\frac{1}{2x}$ é contínua em 2 então pode substituir direto.

<u>Curiosidade</u>: O limite acima corresponde à derivada da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $x = 2$. ∎