4^a Lista de Exercícios de MM-720

Análise no $\mathbb{R}^n$

1. Demonstre o Lema de Morse: Se $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma aplicação diferenciável de classe C^k, com $k \geq 3$, $a \in U$ um ponto crítico não degenerado, então existe um difeomorfismo (mudança de coordenadas) φ tal que em uma vizinhança de a, $f \circ \varphi(x_1, \ldots, x_n) - f(a) = x_1^2 + \ldots x_k^2 - x_{k+1}^2 \ldots - x_n^2$.

2. A partir das formas locais de imersão e submersão, enuncie e demonstre o teorema do posto.

3. Mostre que se $f : M \to N$ é um difeomorfismo e M é orientável então N também é orientável.

4. Seja M uma superfície não-orientável. Prove que existem duas vizinhanças parametrizadas conexas, $U, V \in M$ tais que $U \bigcap V$ tem pelo menos duas componentes conexas, numa das quais a mudança de coordenadas tem determinante de jacobiano positivo enquanto na outra esse determinante é negativo.

5. Sejam $M, N \in \mathbb{R}^9$ respectivamente os conjuntos das matrizes 3×3 de postos 1 e 2 respectivamente. Mostre que M e N são subvariedades C^∞ de $\mathbb{R}^9$ com $\dim M = 5$, $\dim N = 8$, ambas orientáveis.

6. Seja $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ (chamado de um 3-simplexo). Mostre que $vol(T) = \int_0^1 \; dx \; \int_0^{1-x} \; dz \; \int_0^{1-x-z} \; dy = 1/6$.

7. Seja $V_m(r)$ o volume da bola de centro na origem e raio r em $\mathbb{R}^m$. Prove que se tem a relação indutiva: $V_{n+1}(r) = 2V_n(1) \int_0^r \; (r^2 - t^2)^{n/2} \; dt$ e conclua daí que $V_m(r) = \frac{r^m \pi^{m-2}}{(m/2)!}$ quando m é par e $V_m(r) = r^m \pi^{(m-1)/2} 2^{(m+1)}/(m+1)!$ se m é ímpar. Observe que dessas fórmulas resulta um fato curioso: $\lim_{m\to\infty} \; V_m(r) = 0$.

8. Calcule explicitamente e mostre que as projeções estereográficas em S^2 formam um sistema de coordenadas (i.e. parametrizações ou cartas locais). Generalize para S^k. A aplicação $i : S^k \to S^k$ dada por $i(x) = -x$ preserva orientação?