

2ª Lista de Exercícios de MM-720

Análise no \mathbb{R}^n
abril/2023

1. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto convexo. Dada $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável, considere as seguintes afirmações:
 - a) $\|f'(x)\| \leq c$ para todo $x \in U$;
 - b) $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$ para quaisquer $x, y \in U$;
 - c) f é uniformemente contínua;
 - d) para todo $x_0 \in \bar{U}$, existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
 - e) se U é limitado então $f(U)$ é limitado.

Mostre que $(a) \Leftrightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e)$.

2. Seja $f : U \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ uma função que possui todas as derivadas direcionais $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ num ponto $a \in U$, $U \subset \mathbf{R}^m$ aberto. Se não existirem pelo menos $m - 1$ vetores v , linearmente independentes, tais que $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$, então f não é diferenciável no ponto a .
3. Dada uma transformação linear $A : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$, defina as funções $f : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ e $g : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ pondo $f(x, y) \doteq \langle A \cdot x, y \rangle$ e $g(x) = \langle A \cdot x, A \cdot x \rangle$. Determine $\text{grad } f(x, y)$ e $\text{grad } g(x)$.
4. Seja $f : U \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ uma função diferenciável no aberto U . Se para algum $b \in \mathbf{R}^n$, o conjunto $f^{-1}(b)$ possui um ponto de acumulação $a \in U$ então $f'(a) : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ não é injetiva.
5. Seja $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ uma função diferenciável, com $f(0) = 0$. Se a transformação linear $f'(0)$ não tem autovalor 1 então existe uma vizinhança V de 0 em \mathbf{R}^m tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in V - \{0\}$.
6. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ diferenciável no aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^m$. A fim de que seja $\|f(x)\| = \text{constante}$, é necessário e suficiente que $f'(x) \cdot h$ seja perpendicular a $f(x)$, para todo $x \in U$ e todo $h \in \mathbb{R}^m$.

7. (fácil, mas importante no contexto de variedades) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável em $a \in U$. Mostre que na definição de derivada direcional $\partial f / \partial v(a)$ não precisa ser tomada exclusivamente a direção da reta parametrizada passando por $a \in U$ e com velocidade v , como se define usualmente; pode ser tomada em relação a qualquer curva diferenciável γ passando por a no tempo $t = 0$ com velocidade $\gamma'(0) = v$, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0}$$

8. Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ um aberto convexo e $A : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ uma aplicação diferenciável. A fim de que exista $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ duas vezes diferenciável, tal que $f'(x) = A(x)$ para todo $x \in U$, é necessário e suficiente que $\langle A'(x)v, w \rangle = \langle A'(x)w, v \rangle$ para todo $v, w \in \mathbb{R}^m$.
9. Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitziana no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, com $a \in U$, e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciável no aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $f(U) \subset V$ e $b = f(a)$. Se $g'(b) = 0$ então $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto a , com $(g \circ f)'(a) = 0$. E se f não for de Lipschitz?
10. Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$, com $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ com $g(f(x)) = x$ para todo $x \in U$. Se $y = f(x)$, prove que as transformações lineares $f'(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g'(y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ têm o mesmo posto.
11. Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , com $\varphi(f(x)) = 0$ para todo $x \in U$. Dado $a \in U$, se $\text{grad}\varphi(b) \neq 0$, $b = f(a)$, então $\det f'(a) = 0$.
12. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Se $|f(x)|$ é constante em U então o determinante do jacobiano de f é identicamente nulo.