MM-720 Lista de Exercício Extra -pós P1

Análise no $\mathbb{R}^n$

maio/2023

1. Seja $f : U \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ uma função diferenciável no aberto U. Se para algum $b \in \mathbf{R}^n$, o conjunto $f^{-1}(b)$ possui um ponto de acumulação $a \in U$ então $f'(a) : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ não é injetiva.

2. Seja $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ uma função diferenciável, com $f(0) = 0$. Se a transformação linear $f'(0)$ não tem autovalor 1 então existe uma vizinhança V de 0 em $\mathbf{R}^m$ tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in V - \{0\}$.

3. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n - \{0\}$ diferenciável no aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^m$. A fim de que seja $||f(x)|| =$ constante, é necessário e suficiente que $f'(x) \cdot h$ seja perpendicular a $f(x)$, para todo $x \in U$ e todo $h \in \mathbb{R}^m$.

4. Mostre que se todo conjunto homeomorfo a $X \subset \mathbf{R}^n$ é limitado então X é compacto.

5. Mostre que se todo conjunto homeomorfo a $X \subset \mathbf{R}^n$ é fechado então X é compacto.

6. Para $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbf{N}$, seja $B : \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_3}$ uma transformação bilinear, $T : \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_2}$ uma transformação linear e $f : \mathbf{R}^{n_3} \to \mathbf{R}^{n_4}$ uma aplicação de classe C^2. Descreva a derivada $(f(B(a, Tb)))'(u_1, v_1) \in \mathbf{R}^{n_4}$, com $u_1 \in \mathbf{R}^{n_1}$ e $v_1 \in \mathbf{R}^{n_2}$. Descreva a segunda derivada

   $(f(B(a, Tb)))''((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in \mathbf{R}^{n_4}$. Identifique claramente em que espaço está cada vetor, cada componente e a dimensão de cada transformação linear (matriz).

7. Para $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 \in \mathbf{N}$, seja $B : \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_3}$ uma transformação bilinear e $f : \mathbf{R}^{n_3} \times \mathbf{R}^{n_4} \to \mathbf{R}^{n_5}$ uma aplicação de classe C^2. Descreva a derivada $(f(B(a, b), c))'(u_1, v_1, w_1) \in \mathbf{R}^{n_5}$, com $u_1 \in \mathbf{R}^{n_1}$, $v_1 \in \mathbf{R}^{n_2}$, $w_1 \in \mathbf{R}^{n_4}$. Descreva a segunda derivada

   $(f(B(a, b), c))''((u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2)) \in \mathbf{R}^{n_5}$. Identifique claramente em que espaço está cada vetor, cada componente e a dimensão de cada transformação linear (matriz).

8. Para $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbf{N}$, seja $f : \mathbf{R}^{n_1} \to \mathbf{R}^{n_2}$ uma aplicação de classe C^2, $B : \mathbf{R}^{n_2} \times \mathbf{R}^{n_3} \to \mathbf{R}^{n_4}$ uma transformação bilinear. Descreva a derivada $(B(f(a), b))'(u_1, v_1) \in \mathbf{R}^{n_4}$, com $u_1 \in \mathbf{R}^{n_1}$ e $v_1 \in \mathbf{R}^{n_3}$. Descreva a segunda derivada

   $(B(f(a, b))''((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in \mathbf{R}^{n_4}$. Identifique claramente em que espaço está cada vetor, cada componente e a dimensão de cada transformação linear (matriz).

9. Idem para $B(f(a), g(b))$, com B bilinear, f e g de classe C^2.