1^a Prova de MM-720

Análise no $\mathbb{R}^n$

13/abril/2023

Nome:____RA: __________

Boa prova!

1. Seja $f : U \to \mathbf{R}^m$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbf{R}^m$ e $\varphi : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ de classe C^1, com $\varphi(f(x)) = 0$ para todo $x \in U$. Dado $a \in U$, se $\nabla\varphi(b) \neq 0$ com $b = f(a)$ então $\det f'(a) = 0$.

2. Mostre que se todo conjunto homeomorfo a $X \subset \mathbf{R}^n$ é limitado então X é compacto.

3. Seja $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ um caminho diferenciável. Se $a \in I$ é ponto de acumulação de um conjunto $f^{-1}(v)$, para algum $v \in \mathbf{R}^n$ então $f'(a) = 0$.

4. Seja $K \subset \mathbf{R}^n$. Mostre que se K for compacto então toda função contínua $f : K \to \mathbf{R}^m$ é uniformemente contínua. Vale a recíproca?

5. Para $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbf{N}$, seja $B : \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_3}$ uma transformação bilinear, $T : \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_2}$ uma transformação linear e $f : \mathbf{R}^{n_3} \to \mathbf{R}^{n_4}$ uma aplicação de classe C^2. Descreva, interpretando claramente suas componentes, a segunda derivada da composição $f(B(x, Ty)) : \mathbf{R}^{n_1} \times \mathbf{R}^{n_2} \to \mathbf{R}^{n_4}$. Verifique se essa segunda derivada é simétrica e por que.