2) Mostrar que $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ é norma.

$p > 1$ ($p = 1, 2$ e ∞ já foi feito)

Só falta mostrar a desigualdade triangular (Desigualdade de Minkovsky)

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$ (Kolmogorov-Fomin pág 41)

<u>Desigualdade de Hölder:</u> $p, q \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum |b_k|^q\right)^{1/q}$$

Com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Caso $p = 1$ e $q = \infty$ é trivial)

<u>Obs:</u> ① $p = q = 2$ é a desigualdade de Cauchy-Schwartz.

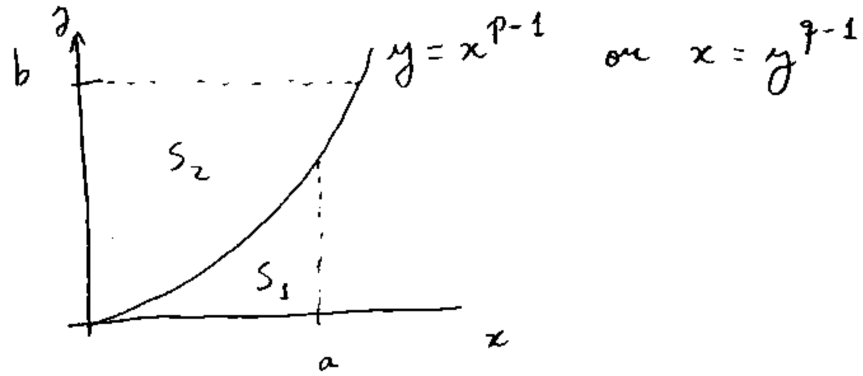
② $\frac{1}{p-1} = q - 1$ e $(p-1)q = p$ | <u>Dem:</u> $\begin{cases} p = \frac{1}{1-\frac{1}{q}} = \frac{q}{q-1} \text{ e } \frac{q}{p} = q-1 \\ q = \frac{p}{p-1} \end{cases}$

<u>Dem:</u> <u>Obs 1:</u> a desigualdade vale para $a = (a_1, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_n)$ sse vale para λa e μb, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\therefore$ vamos assumir que $\sum^{n} |a_k|^p = \sum^{n} |b_k|^p = 1$

e o que tem que ser provado é que $\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq 1$

Para cada $a, b \geqslant 0$ considere as áreas



$$S_1 = \int_0^a x^{p-1}\,dx = \frac{x^p}{p}\Big]_0^a = \frac{a^p}{p}$$

$$S_2 = \int_0^b y^{q-1}\,dy = \frac{b^q}{q} \qquad e$$

$$a \cdot b \leqslant S_1 + S_2 = \frac{a^p}{q} + \frac{b^p}{q}$$

Aplicando a desigualdade acima nos pares a_k e b_k

$$|a_k \cdot b_k| \leqslant \frac{|a_k|^p}{p} + \frac{|b_k|^q}{q}$$

Somando: $$\sum^n |a_k \cdot b_k| \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad \blacksquare$$

Desigualdade de Minkovsky:

Dem: $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$

$$(|a|+|b|)^p = (|a|+|b|)^{p-1}|a| + (|a|+|b|)^{p-1}|b|$$

Aplicando essa identidade em todos os pares a_k e b_k temos

$$\sum^n (|a_k|+|b_k|)^p = \sum^n (|a_k|+|b_k|)^{p-1} \cdot |a_k| + \sum (|a_k|+|b_k|)^{p-1} \cdot |b_k|$$

E aplica desigualdade de Hölder 2x no lado direito:

$$\leq \left(\sum \left(|a_k|+|b_k|\right)^{\overset{p}{\overset{\shortparallel}{(p-1)q}}}\right)^{1/q} \cdot \left[\left(\sum |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum |b_k|^p\right)^{1/p}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\sum \left(|a_k|+|b_k|\right)^p\right)^{\overbrace{1-\frac{1}{q}}^{\overset{1/p}{\shortparallel}}} \leq \|(a_k)\|_p + \|(b_k)\|_p \qquad \blacksquare$$

(ver o verso p/ completar)

3) Estender esse resultado para $l_p = \left\{(x_n) : \sum^{\infty} |x_n|^p < \infty\right\}$.

$$\|(x_n)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$$ é norma (só falta verificar desig. Δ'r)

Verificação: $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n + y_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |x_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{N} |y_n|^p\right)^{1/p}$$

(*) A prova fica completa com a seguinte observação:

Seja $\bar{x} = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ e $\bar{y} = (|y_1|, \dots, |y_n|)$ e

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

Então

$$\|x+y\|_p \underset{\substack{\text{óbvio da}\\ \text{def.}}}{\leq} \boxed{\|\bar{x}+\bar{y}\|_p \underset{\substack{\text{o que acabamos}\\ \text{de mostrar}}}{\leq} \|\bar{x}\|_p + \|\bar{y}\|_p} \underset{\text{óbvio}}{=} \|x\|_p + \|y\|_p$$

$\boxtimes$