Espaços Métricos: lista de exercícios 7

1. Seja (X, d) um espaço métrico. Provar que (X, d) é completo se e somente se para qualquer sequencia de conjuntos fechados não vazios $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ encaixados, (i.e. $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$) tal que $\lim_{n\to\infty} diam(F_n) = 0$ temos que
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi.$$

2. Seja (X, d) um espaço métrico e U e V subespaçõs completos de X. Provar que $U \cup V$ é um subespaço completo de X.

3. Sejam (X, d) e (X', d') espaços métricos. Provar que o espaço métrico $(X \times X', p)$ onde
$$p((a, b), (c, d)) = \max d(a, c), d(b, d)$$
é completo se e somente se os espaços métricos (X, d) e (X', d') são completos.

4. Sejam $\{(X_i, d_i) : i \in \mathbb{N}\}$ uma familia enumeravel de espaços métricos. Provar que o espaço métrico $(\Pi_{i=1}^{\infty} X_i, d_\Pi)$, onde d_Π é definida por
$$d_\Pi(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i, y_i)}{1 + d_i(x_i, y_i)}$$
é completo se e somente se para cada $i \in \mathbb{N}$, (X_i, d_i) é um espaço métrico completo.

5. Prove que o espaq métrico (l^∞, d_∞) das sequencias limitadas, onde
$$d_\infty((x_n), (y_n)) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}$$
é completo. Prove que o subespaço c das sequencias convergentes é completo.

6. Seja $C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \to \mathbf{R} :$ continuas$\}$ o conjunto das funções de $[0, 1]$ a valores reais continuas, com a métrica
$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx.$$
Provar que $C([0, 1])$ não é completo.

7. Métrica de Hausdorff: Seja (X, d) um espaço métrico e $S(X)$ o conjunto dos subconjuntos não vazios fechados limitados de X. Definimos $h : S(X) \times S(X) \to \mathbb{R}$ por
$$h(A, B) = \max(\sup\{\text{dist}(b, A) : b \in B\}, \sup\{\text{dist}(a, B) : a \in A\}).$$
1) Provar que h é uma métrica, chamada métrica de Hausdorff.

2) Provar que $(S(X), h)$ é completo se e somente se (X, d) é completo.

8. Seja (X, d) um espaço métrico. Provar as seguintes afirmações:

1) Sejam (x_n) e (y_n) sequencias de Cauchy em X. Então existe $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$.

2) Sejam (x_n) e (y_n) sequencias de Cauchy em X. Se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ então $\lim_{n\to\infty} y_n = x$.

3) Sejam (x_n) , (x'_n), (y_n) e (y'_n) sequencias de Cauchy em X tais que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$ e $\lim_{n\to\infty} d(y_n, y'_n) = 0$. Provar que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n).$$

9. Completamento de Cantor: Seja (X, d) um espaço métrico e $SC(X)$ o conjunto das sequencias de Cauchy de X. Consideramos em $SC(X)$ a seguinte relação

$$(x_n) \sim (y_n) \text{ se } \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

1) Provar que $\sim$ é uma relação de equivalência.

2) Provar que $\tilde{X} := SC(X)| \approx$ é um espaço métrico com $\tilde{d} : \tilde{X} \times \tilde{X} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\tilde{d}([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

3) Provar que $\Phi : X \to \tilde{X}$ definida por $\Phi(x) = [(x)]$ é uma imersão isométrica ((x) é a sequencia tal que todos seus termos são x).

4) Provar que $(\tilde{X}, \tilde{d})$ é completo e que $\overline{\Phi(X)} = \tilde{X}$.

10. Espaços Holder: Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continua e $\alpha \in (0, 1)$ definimos

$$|f|_\alpha = \sup_{s\neq t} |\frac{|f(s) - f(t)|}{|t - s|^\alpha}.$$

Dizemos que f é α-Holder se $|f|_\alpha < \infty$. Fixamos $o \in \mathbb{R}$. Denotamos por $C^\alpha_o([0, 1])$ o conjunto das funções de $[0, 1]$ α-Holder continuas tais que no zero tomam o valor o. Resulta que $(C^\alpha_o([0, 1]), d_\alpha)$ é um espaço métrico, onde

$$d_\alpha(f, g) = |f - g|_\alpha.$$

Provar que $(C^\alpha_o([0, 1]), d_\alpha)$ é completo.

11. Use o teorema de Baire para mostrar que o conjunto de Cantor não é enumerável (ver Lima, Exemplo 31, pág 192).

12. E L Lima, Capítulo 7, exercícios 1-45.