2a Prova de Espaços Métricos - MA 604 - 31/10/2018

Nome: Soluções RA:

1. Demonstre que é verdade ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações

   a) Se um conjunto for conexo, seu interior também é conexo.

   b) Se um conjunto for conexo e limitado então sua fronteira também é conexa.

   c) Seja $f : M \to N$ uma função entre dois espaços métricos. A função f é contínua se e somente se a imagem de todo conjunto conexo for conexo.

   d) Existem espaços métricos onde sequências de Cauchy podem não ser convergentes.

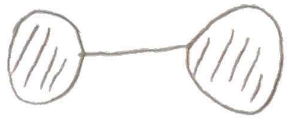
   e) Um espaço métrico M é conexo se e somente se toda função contínua $f : M \to \{0, 1\}$ é constante.

   f) Se M é um subespaço fechado de um espaço métrico completo, então M é completo.

   g) Existe espaço métrico M e uma contração f em M que não tem ponto fixo.

   f) O conjunto $C([0, 1]) = \{f : [0, 1] \to \mathbf{R}, \text{ contínua}\}$ com a métrica $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$ formam um espaço métrico completo.

2. Seja M um espaço métrico completo. Suponha que $M = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ onde cada F_n é fechado em M. Por que $A = \cup_{n=1}^{\infty} \text{int}\, F_n$ é não vazio? Mais do que isso, mostre que A é denso em M.

Q1 | a) Falso. Conjuntos do tipo 

são conexos com interior não conexo.

b) Falso. Conjuntos do tipo  ou

c) ($\Rightarrow$) Verdadeiro, feito em aula.

($\Leftarrow$) Falso.
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \cos\frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

é tal que leva conexos (intervalos) que contem o 0 no intervalo $[-1,1]$ e qualquer outro intervalo em intervalo, porque é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

d) Verdadeiro. Basta o espaço não ser completo.

Ex: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy mas não converge.

e) ($\Rightarrow$) Feito em aula: imagem por função contínua de conexo é conexo.

($\Leftarrow$) Por absurdo. Se $M = A \dot{\cup} B$, A e B abertos $\neq \emptyset$, $f: M \to \{0,1\}$
$f(x) = 0$ se $x \in A$ e $f(x) = 1$ se $x \in B$ é contínua. Absurdo $\blacksquare$

f) Verdadeiro: feito em aula de teoria.

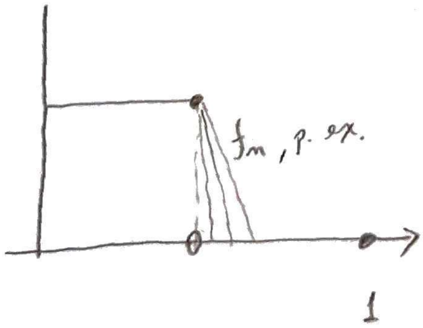
g) Pelo Teo. Ponto Fixo de Banach, só existe exemplo se o espaço não for completo.

$$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{2}$$

é contração e $\nexists$ pto fixo.

h) Falso. Considere uma sequencia de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ convergindo ponto a ponto (mas não uniformemente, claro!) para $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1/2] \\ 0 & \text{se } x \in (1/2, 1] \end{cases}$$



$f_n \to g$ na métrica d mas $g \notin C([0,1])$.

Q2) Feito em aula de teoria, proposição logo depois da "2ª Versão do Teo. de Baire".

Demonstração alternativa (Uzita e Andrey):

Vamos usar que para todo par de seq. de conjuntos (A_n) e (B_n), $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\boxed{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus B_n)}$$

$$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{e} \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \text{int}(F_n) \quad \text{então}$$

$$A^c = M \setminus A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \setminus \text{int}(F_n)) \Rightarrow A^c \text{ é magro}$$

fechado
∴ completo

$$\underset{\text{Baire}}{\Longrightarrow} \text{int}(A^c) = \emptyset \Rightarrow A \text{ é denso (genérico)}$$