1a. Prova de Topologia de Espaços Métricos - MA 604
24/set/2018

Nome: Soluções

RA:

1. Verifique se os espaços de funções contínuas $C([0,1];\mathbb{R})$ e $C((0,1);\mathbb{R})$ são espaços métricos com a distância do supremo. Mostre que todo espaço métrico (M,d) pode ser imerso isometricamente no espaço de funções limitadas $\mathcal{F}_b := \{f : M \to \mathbb{R}\}$ com a distância do supremo.

2. Seja $(E, |\cdot|)$ um espaço vetorial cuja norma provém de um produto interno $< \cdot, \cdot >$. Mostre que $T : (\mathbb{R}, ||\cdot||_3) \to (E, |\cdot|)$ é uma isometria se e somente se for afim, i.e., $T(t) = x + ty$, com $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $|y| = 1$. A dimensão de E pode ser infinita? Verifique que $S : (\mathbb{R}, ||\cdot||_3) \to (\mathbb{R}^n, ||\cdot||_1)$ dada por $t \mapsto (t,0,0)$ se $t \geq 0$ e $t \mapsto (0,0,-t)$ se $t \leq 0$ é uma imersão isométrica; isso contradiz o resultado acima?

3. Mostre que não existe ou dê um exemplo de:

a) uma transformação linear que não seja contínua.

b) dois subespaços métricos discretos M e N tais que $M \cup N$ não seja discreto.

c) um espaço métrico (M,d) tal que a função $d : M \times M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ seja descontínua.

4. Seja (M,d) um espaço métrico e $X \subset M$. Se $f : X \to R$ é uma função uniformemente contínua então para toda sequência (x_n) convergindo para um ponto da fronteira $x_\infty \in \partial X$, sempre existe o limite $\lim f(x_n) \in \mathbb{R}$.

Boa Prova!

<u>Q1</u>: $C([0,1];\mathbb{R})$ com $\|\cdot\|_{sup}$ é espaço normado, visto em aula (satisfaz a definição de norma, ou $d(x,y) = \|x-y\|$ satisfaz a definição de E.M). É fundamental que os conjuntos $\{f(x) : x \in [0,1]\}$ sejam ltdos. Em $C((0,1);\mathbb{R})$, $\|\cdot\|_{sup}$ não é norma porque as funções podem não ser ltdos.

<u>Imersão Isométrica em $\mathcal{F}_b$:</u>

I) <u>Fixa um $a \in M$</u>. Define

$$\begin{aligned} \varphi : M &\longrightarrow \mathcal{F}_b \\ x &\longmapsto \varphi_x : M \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad y \longmapsto d(y,x) - d(y,a) \end{aligned}$$

Aplicando a des. Δ'r (2 vezes) temos que $|d(y,x) - d(y,a)| \leq d(x,a)$

$\therefore$ φ_x é ltdo $\forall x \in M$. Para verificar que é uma imersão isométrica, tome $x_1, x_2 \in M$. Então $\|\varphi_{x_1} - \varphi_{x_2}\|_{sup} =$

$$\sup_{y \in M}\{|\varphi_{x_1}(y) - \varphi_{x_2}(y)|\} = \sup\{\underbrace{|d(y,x_1) - d(y,x_2)|}_{\leq d(x_1,x_2) \text{ pela des. } \Delta\text{'r}} ; y \in M\}$$

Mas com $y = x_1$, atingimos o supremo e portanto

$$\|\varphi_{x_1} - \varphi_{x_2}\|_{sup} = d(x_1,x_2)$$

$\therefore$ é imersão isométrica.

Obs ① Não obtemos só uma imersão isométrica, note que obtemos uma família (indexada em M) de imersões isométricas.

② Essas imersões estão na verdade em um subespaço muito interessante de $\mathcal{F}_b$. Estão no subespaço das funções uniforme/e contínuas

Q2: Inicialmente observe que $\|\cdot\|_3 = \|\cdot\|_p \quad \forall\, 1 \leq p \leq \infty$ em $\mathbb{R}$.

Usando que translação em E.V.N. é isometria e que composição de imersões isométricas é uma imersão isométrica temos que

$$S = \underbrace{T_{r_{-T(0)}}}_{\text{translação}} \circ T \quad \text{é uma imersão isométrica}$$

tal que $S(0) = 0$.

Agora: a) $\langle S(t), S(s) \rangle = t \cdot s$

Dem: Porque $\langle S(t) - S(s), S(t) - S(s) \rangle = (t-s)^2$ então

$$\cancel{\langle S(t), S(t) \rangle} - 2\langle S(t), S(s) \rangle + \cancel{\langle S(s), S(s) \rangle} = \cancel{t^2} - 2ts + \cancel{s^2}$$

$$\Rightarrow \langle S(t), S(s) \rangle = t \cdot s$$

p que é isometria $\|S(t)\| = t$

b) $S(t) = t\,S(1)$:

$$\langle S(t) - t\,S(1), S(t) - t\,S(1) \rangle =$$

$$\langle S(t), S(t) \rangle - 2t \langle S(t), S(1) \rangle + t^2 \langle S(1), S(1) \rangle =$$

$$t^2 - 2t^2 + t^2 = 0$$

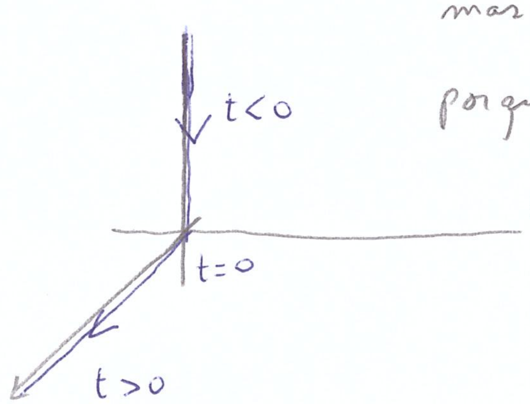
$\therefore$ S é linear. Chame $y = S(1)$ e $x = -T(0)$ então

$$T = x + ty$$

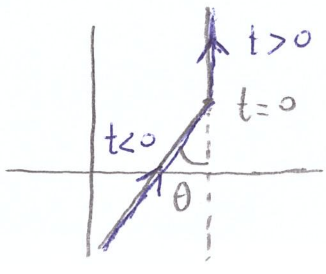
A dimensão não é relevante na demonstração.

A recíproca é direta: $\|T(t) - T(s)\| = \|(t-s)y\| = |t-s|$.

Para o $S : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$ dado. É uma imersão isométrica, mas não contradiz o resultado porque $\|\cdot\|_1$ não provém de um produto interno



Outro exemplo de imersão isométrica que não é afim: $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{MAX})$



$\theta < \pi/2$

Q3: a) Mostramos em aula que todas as transformações lineares cujos domínios tenham dimensão finita são contínuas. Mas demos o exemplo de uma T.L. não contínua em um espaço de dimensão infinita:

$$Id : \left(C([0,1];\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^1}\right) \longrightarrow \left(C([0,1];\mathbb{R}), \|\cdot\|_{sup}\right)$$

Por exemplo $f_n = x^n \xrightarrow{L^1} 0$ mas $\|f_n\|_{sup} \equiv 1$.

b) Seja (x_n) uma seq. em (E,d) t.q. $x_n \neq x_m \neq x_0$ p/ n,m suficient/e grandes e $x_n \longrightarrow x_0$. Então tome $M = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ e $N = \{x_0\}$.

c) Considere a métrica $d + d$ em $M \times M$. Fixado $(x_0, y_0) \in M \times M$, dado $\varepsilon > 0$ tome $\delta = \varepsilon$. Então se $(x,y) \in M \times M$ é tal que $d(x,x_0) + d(y,y_0) < \delta$. Pela des. Δ'r

$$d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(x_0,y_0) + d(y_0,y)$$

$$\Downarrow$$

$d(x,y) - d(x_0,y_0) \leq d(x,x_0) + d(y,y_0)$. Usando mais uma vez a des. triangular:

$$\left| d(x,y) - d(x_0,y_0) \right| \leq d(x,x_0) + d(y,y_0)$$

Portanto se $d_{M\times M}((x,y),(x_0,y_0)) < \delta = \varepsilon \Rightarrow |d(x,y) - d(x_0,y_0)| < \varepsilon$

i.e. d é contínua (aliás, é uniformemente contínua).

Q4: Basta mostrar que a sequência de números reais $(f(x_n))$ é de Cauchy. Mas de fato, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ t.q. se $d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \delta$ porque f é U.C.

Como (x_n) converge, (x_n) é de Cauchy $\therefore \exists N$ t.q. $n,m > N$

$\Rightarrow d(x_n, x_m) < \delta \Rightarrow |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$.

Portanto $(f(x_n)) \in \mathbb{R}$ é de Cauchy, $\therefore$ converge.