MA502 Turma P 2S 2017 - Teste 3

Nome: _____ RA: _____ 16/11/2017

Faça a questão 1 e mais outra de sua escolha.

1. Diga se é verdadeiro ou falso. Justifique sua resposta.

   a) Dado um compacto $X \subset \mathbb{R}$ e uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$, sempre existe um número real positivo M tal que para todo $x \in X$ temos que $|f(x)| < M$.

   b) Dado um compacto $X \subset \mathbb{R}$, para todo número real positivo M, existe uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ e $x \in X$ tal que $|f(x)| > M$.

   c) Não existe função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e um conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$ tal que $f(F)$ é aberto.

   d) Dada qualquer função contínua $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, existe um número real positivo M tal que para todo $x \in X$ temos que $|f(x)| < M$.

2. Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se e somente se para todo conjunto aberto $A \in \mathbb{R}$, sua imagem inversa $f^{-1}(A)$ é um conjunto aberto.

3. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua então o conjunto $\{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$ é fechado e $\{x \in \mathbb{R}; f(x) > 0\}$ é aberto.

4. Se uma função $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então existe o limite lateral $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

5. Por que a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é uniformemente contínua? No entanto, verifique pela definição de derivada que f não é derivável em 0.