MA502 Turma P 2o. Sem. 2017 - Prova 2

Nome: _____ RA: _____ 24/10/2017

Escolha 4 dentre as 5 questões abaixo; e circule-as. Favor não destacar as folhas.

1. Dados $Y \subset X \subset \mathbb{R}$ conjuntos, $a \in Y' \subset X'$ real, e $f : X \to \mathbb{R}$, prove que se existir o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ e for igual a L então existe o limite $\lim_{x \to a} f\big|_Y(x)$ e é igual a L. Vale a volta? (demonstre ou dê um contra-exemplo).

   (Aqui temos $f\big|_Y : Y \to \mathbb{R}$; $f\big|_Y(y) = f(y)$ é a *restrição* de f a Y, e X' denota o conjunto dos pontos de acumulação de X.)

2. Uma sequência de reais $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dita $\frac{1}{2}$-comum se $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$ distintos.

   a) Dado $L \in \mathbb{R}$, encontre uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\frac{1}{2}$-comum com $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = L$.

   b) Existe alguma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\frac{1}{2}$-comum com $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergindo?

3. Dada uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de inteiros positivos, construa uma sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que é definida como $b_n = a_1 \cdot a_2 \ldots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$.

   a) Se existe no máximo uma quantidade finita de n com $a_n = 1$, prove que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i}$ converge.

   b) Existe alguma sequência de inteiros positivos $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, com infinitos termos iguais a 1, tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i}$ converge?

4. Sendo $\overline{X}$ o fecho de X e X^c o complementar de X em $\mathbb{R}$,

   a) Prove que para todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$, vale que $(\overline{X})^c \subset \overline{X^c}$.

   b) Suponha que para algum conjunto $T \subset \mathbb{R}$ valha $(\overline{T})^c = \overline{T^c}$. Prove que se tem $T = \emptyset$ ou $T = \mathbb{R}$. (Dica: você pode usar a conexidade de $\mathbb{R}$)

5. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto, $a \in X'_+$ real e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que f é monótona crescente, e que é limitada. Prove que existe $\lim_{x \to a^+} f(x)$.