Solução da P2

1. Dados $Y \subset X \subset \mathbb{R}$ conjuntos, $a \in Y' \subset X'$ real, e $f : X \to \mathbb{R}$, prove que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ implica $\lim\limits_{x\to a} f\big|_Y(x) = L$. Vale a volta?

   Solução: Pela definição de limite; $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0$ com $0 < |x-a| < \delta$, $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Como $Y \subset X$, temos $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0$ com $0 < |x-a| < \delta$, $x \in Y \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, ou seja, $\lim\limits_{x\to a} f\big|_Y(x) = L$.

   Agora para a volta: é falsa. Tome $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Temos $\nexists \lim\limits_{x\to a} g(x)$, $\forall a \in \mathbb{R}$ mas, por outro lado, $\lim\limits_{x\to a} g\big|_{\mathbb{Q}}(x) = 1$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

2. Uma sequência de reais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita $\frac{1}{2}$-comum se $\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$ distintos.

   a) Dado $L \in \mathbb{R}$, encontre uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\frac{1}{2}$-comum com $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = L$.

   b) Existe alguma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\frac{1}{2}$-comum com $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ divergindo?

   Solução: a) Tome $a_1 = L$; e $a_{2n} = (\frac{1}{2})^{2n}$, $a_{2n+1} = -(\frac{1}{2})^{2n}$. Ou seja, $L, \frac{1}{4}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{-1}{16}, \ldots$ Outras soluções são possíveis.

   b) Tome $a_{2n} = (\frac{1}{2})^{2n}$, $a_{2n+1} = 100$. Ou seja, $100, \frac{1}{4}, 100, \frac{1}{16} \ldots$. Outras soluções são possíveis.

3. Dada uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de inteiros positivos, construa uma sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, que é definida como $b_n = a_1 \cdot a_2 \ldots \cdot a_n = \prod\limits_{i=1}^{n} a_i$.

   a) Se existe no máximo uma quantidade finita de n com $a_n = 1$, prove que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i}$ converge.

   b) Existe alguma sequência de inteiros positivos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com infinitos termos iguais a 1, tal que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i}$ converge?

   Solução: a) Temos $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1/b_{n+1}}{1/b_n} = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}$ pois há apenas um

número finito de $a_i = 1$ e a partir disso $a_i \geq 2$. Assim, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{b_i}$ converge pelo teste da razão.

b) Temos que para a sequência $a_{2n} = 1, a_{2n+1} = 2$ a sequência (b_n) associada é $2, 2, 4, 4, 8, 8 \ldots$ cuja soma dos inversos é igual a $2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2 \cdot 1 = 2$. (Ela também converge pelo teste da raiz, pois o limite da raiz é $\sqrt{2}/2$.)

Observação: Existem sequências (a_n) com séries associadas que convergem e para as quais $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, ou seja, para as quais o teste da raiz também é inconclusivo.

4. Sendo $\overline{X}$ o fecho de X e X^c o complementar de X em $\mathbb{R}$,

   a) Prove que para todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$, vale que $(\overline{X})^c \subset \overline{X^c}$.

   b) Suponha que para algum conjunto $T \subset \mathbb{R}$ valha $(\overline{T})^c = \overline{T^c}$. Prove que se tem $T = \emptyset$ ou $T = \mathbb{R}$. (Dica: você pode usar a conexidade de $\mathbb{R}$)

   Solução: a) Temos $A \subset \overline{A}, \forall A \subset \mathbb{R}$ então $(\overline{X})^c \subset X^c \subset \overline{X^c}$. ($A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.)

   b) Como $(\overline{T})^c = \overline{T^c}$, temos que $\overline{T^c}$ e $(\overline{T})^c$ são ambos fechados e abertos, como complementares de fechados. Também o é $\overline{T}$ pois seu complementar é fechado e aberto. Assim $\mathbb{R} = \overline{T} \cup (\overline{T})^c$ é uma cisão de $\mathbb{R}$ logo, pela conexidade de $\mathbb{R}$ temos $\overline{T} = \emptyset$ e acabou, ou $\overline{T} = \mathbb{R}$ com o que $\overline{T}^c = \emptyset \Rightarrow \overline{T^c} = \emptyset \Rightarrow T^c = \emptyset \Rightarrow T = \mathbb{R}$.

5. Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto, $a \in X'_+$ real e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que f é monótona crescente, e que é limitada. Prove que existe $\lim_{x \to a^+} f(x)$.

   Solução: Seja $A = \{f(x) \,|\, x > a\} \subset Im(f)$. Como $Im(f)$ é um conjunto limitado, existe $\inf A = s$. Afirmamos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = s$; de fato, dado $\varepsilon > 0$, $s + \varepsilon$ não é cota inferior de A e portanto $\exists\, b > a$, $f(b) < s + \varepsilon$. Da monotonicidade de f, segue $\forall\, a < x < b$, $s \leq f(x) \leq s + \varepsilon$, ou seja, $|f(x) - s| < \varepsilon$, $\forall x$ com $|x - a| < |b - a|$. Tome portanto $\delta = b - a > 0$ e conclua pela definição de limite.